Exo corrigé

Une entreprise veut acheminer de la marchandise depuis 4 unités de distribution U_A, U_B, U_C et U_D vers 4 points de vente de ventes D_1, D_2, D_3 et D_4. Les coûts unitaires de transport, les demandes et les disponibilités sont indiqués dans le tableau suivant :

	Point de vente D_1	Point de vente D_2	Point de vente D_3	Point de vente D_4	Disponibilités ai
Unité U_A	26	20	25	28	200
Unité U_B	28	21	24	23	160
Unité U_C	30	22	26	27	30
Unité U_D	30	23	25	28	140
Demandes bj	100	120	130	180	

- En appliquant la méthode de Vogel, déterminer la solution de base admissible et le coût qui en résulte.
- En partant de cette solution de base, rechercher la solution optimale qui minimiserait le coût total de transport. Calculer sa valeur.
- Trouver une autre solution optimale équivalente
- Retrouver la solution optimale en partant cette-fois de la méthode du moindre coût.
- Admettons que l'unité U_D ne peut pas desservir le point de vente D_3 et que la capacité d'offre de cette unité a augmenté de 100 %, quelle sera alors la nouvelle solution optimale ? chercher cette solution en partant de la méthode des moindres coûts.

Solution :

Vérifions d'abord la situation du problème de transport quant à son équilibre :

Somme des capacités (offres) des unités de distribution : 200 + 160 + 30 + 140 = 530 unités

Somme des demandes des points de vente : 100 + 120 + 130 + 180 = 530 unités

Le problème est équilibré du fait que la demande globale est égale à l'offre totale. On peut donc chercher la solution de base à l'aide des 3 méthodes connues (Nord-ouest, Moindres coûts ou Vogel).

Recherche de la solution de base à l'aide de la méthode de Vogel

Calculons les différences des deux coûts les plus bas au niveau de chaque ligne et chaque colonne, puis choisissions la plus grande d'entre-elles et précédons ensuite aux affectations:

CT_1	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	différences				
Unité U_A	26 / 80	20 / 120	25	28	~~200~~ ~~80~~ 0	5	1	1	-	-
Unité U_B	28	21	24	23 / 160	~~160~~ 0	2	1	-	-	-
Unité U_C	30 / 10	22	26	27 / 20	~~30~~ ~~10~~ 0	4	1	1	1	3
Unité U_D	30 / 10	23	25 / 130	28	~~140~~ ~~10~~ 0	2	3	3	3	2
b_j	~~100~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~120~~ 0	~~130~~ 0	~~180~~ ~~20~~ 0	140					

différences

	D_1	D_2	D_3	D_4
	2	1	1	4
	2	-	1	4
	4	-	0	1
	0	-	1	1
	0	-	-	1

Nous avons trouvé la solution de base avec 7 variables de base (7 = 4+4-1= n + m -1)

La valeur du coût total engendrée par cette solution est :

CT_1 = 80 (26) + 120 (20) + 160 (23) + 10 (30) + 20 (27) + 10 (30) + 130 (25) = 12550 UM.

Testons maintenant l'optimalité de cette solution à l'aide de la méthode des coûts-duals (Balas Hamer)

	CT_1	$v_1 = 0$ D_1	$v_2 = -6$ D_2	$v_3 = -5$ D_3	$v_4 = -3$ D_4	
$u_1 = 26$	U_A	26 $+\theta$ 80	20 $-\theta$ 120	25 <	28 <	200
$u_2 = 26$	U_B	28 <	21 <	24 <	23 160	160
$u_3 = 30$	U_C	30 10 $-\theta$	22 > (2) $+\theta$	26 <	27 20	30
$u_4 = 30$	U_D	30 10	23 > (1)	25 130	28 <	140
	b_j	100	120	130	180	

$\Theta = 10$

$\Delta CT_1 = -10\ (2) = -20$ UM

$CT_2 = CT_1 + \Delta CT_1 = 12550 - 20 = 12530$

Poursuivons le test d'optimalité pour la nouvelle solution

CT_2	$v_1=26$ D_1	$v_2=20$ D_2	$v_3=21$ D_3	$v_4=25$ D_4	
$u_1 = 0$ U_A	26 $+\theta$ 90	20 $-\theta$ 110	25 <	28 <	200
$u_2 = -2$ U_B	28 <	21 <	24 <	23 160	160
$u_3 = 2$ U_C	30 <	22 10	26 <	27 20	30
$u_4 = 4$ U_D	30 10 $-\theta$	23 > (1) $+\theta$	25 130	28 > (1)	140
b_j	100	120	130	180	

$\Theta = 10$

$\Delta CT_2 = -10\ (1) = -10$ UM

$CT_3 = CT_2 + \Delta CT_2 = 12530 - 10 = 12520$

CT_3	$v_1 = 6$ D_1	$v_2 = 0$ D_2	$v_3 = 2$ D_3	$v_4 = 5$ D_4	
$u_1 = 20$ U_A	$\boxed{26}$ 100	$\boxed{20}$ 100	$\boxed{25}$ <	$\boxed{28}$ <	200
$u_2 = 18$ U_B	$\boxed{28}$ <	$\boxed{21}$ <	$\boxed{24}$ <	$\boxed{23}$ 160	160
$u_3 = 22$ U_C	$\boxed{30}$ <	$\boxed{22}$ 10	$\boxed{26}$ <	$\boxed{27}$ 20	30
$u_4 = 23$ U_D	$\boxed{30}$ <	$\boxed{23}$ 10	$\boxed{25}$ 100	$\boxed{28}$ =	140
b_j	100	120	130	180	

Tous les signes des variables hors base (cases vides) sont de type « ≤ », nous concluons que nous avons atteint la solution optimale. Min CT = CT_3 = 12520 UM.
En effet, Min CT = 26(100) + 20(100) + 23(160) + 22(10) + 27(20) +23(10) +25(130) = 12520 UM.

Notons cependant qu'il existe une autre solution optimale équivalente puisque la case $U_D.D_4$ correspondant à la variable hors base X_{44} contient un signe de type « = ». On peut donc se permettre de remplir cette case et trouver une autre solution optimale équivalente. Ce qui nous conduit au résultat suivant :

CT_3	D_1	D_2	D_3	D_4	
U_A	$\boxed{26}$ 100	$\boxed{20}$ 100	$\boxed{25}$ <	$\boxed{28}$ <	200
U_B	$\boxed{28}$ <	$\boxed{21}$ <	$\boxed{24}$ <	$\boxed{23}$ 160	160
U_C	$\boxed{30}$ <	$\boxed{22}$ $+\theta$ 10	$\boxed{26}$ <	$\boxed{27}$ $-\theta$ 20	30
U_D	$\boxed{30}$ <	$\boxed{23}$ $-\theta$ 10	$\boxed{25}$ 130	$\boxed{28}$ = $+\theta$	140
b_j	100	120	130	180	

$\Theta = 10$

$\Delta CT_3 = - 10\ (0) = 0$ UM

$CT_4 = CT_3 + \Delta CT_3 = 12520-0 = 12520$ (même niveau de coûts)

A noter qu'il est n'est pas nécessaire de tester son optimalité car on le sait au préalable.

La solution optimale équivalente est donc la suivante :

CT_1	$v_1 = 1$ D_1	$v_2 = -5$ D_2	$v_3 = -3$ D_3	$v_4 = 0$ D_4	
U_A	26 100	20 100	25	28	200
U_B	28	21	24	23 160	160
U_C	30	22 20	26 <	27 10	30
U_D	30	23	25 130	28 10	140
b_j	100	120	130	180	

Retrouvons maintenant la solution optimale obtenue mais en appliquant cette fois-ci la méthode du moindre coût :

CT_1	D_1	D_2	D_3	D_4	
U_A	26 80	20 120	25	28	~~200~~ ~~80~~ 0
U_B	28	21	24	23 160	~~160~~ 0
U_C	30 10	22	26	27 20	~~30~~ ~~10~~ 0
U_D	30 10	23	25 130	28	~~140~~ ~~10~~ 0
b_j	~~100~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~120~~ 0	~~130~~ 0	~~180~~ ~~20~~ 0	

La valeur du coût total engendrée par cette solution est :

$CT_1 = 80\ (26) + 120\ (20) + 160\ (23) + 10\ (30) + 20\ (27) + 10\ (30) + 130\ (25) = 12550$ UM.

Pour trouver la solution optimale, on adoptera la même démarche que la précédente (ceci dit, on aura affaire aux mêmes boucles puisque nous avons en face de nous exactement un même plan de transport comme solution de base initiale; il est donc inutile de les reprendre).

Supposons maintenant que l'unité U_D ne peut pas desservir le point de vente D_3. Ce qui nous oblige à traiter un cas d'interdiction au niveau de la case $U_D D_3$. Nous devons donc pénaliser cette case en y intégrons un coût colossal « M ».

Par ailleurs, il importe d'équilibrer puisque l'offre totale est désormais supérieure à la demande globale suite à la hausse de la capacité de livraison de l'unité U_C qui passe de 30 unités à 60 unités. Pour ce faire, ajoutons une demande fictive (colonne additionnelle) et pénalisons les cases correspondantes. Appliquons ensuite la méthode des moindres coûts.

CT_1	D_1	D_2	D_3	D_4	D_F	
U_A	26	20 120	25 80	28	M	~~200~~ ~~80~~ 0
U_B	28	21	24	23 160	M	~~160~~ 0
U_C	30	22	26 50	27 10	M	~~60~~ ~~10~~ 0
U_D	30 100	23	**M**	28 10	M 30	~~140~~ ~~130~~ ~~30~~ 0
b_j	~~100~~ 0	~~120~~ 0	~~130~~ ~~50~~ 0	~~180~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~30~~ 0	

La valeur du coût total engendrée par cette solution est :

CT_1 = 120 (20) + 80 (25) + 160 (23) + 50 (26) + 10 (27) + 100 (30) + 10 (28) + 30 (0) = 12930 UM.

		v_1= 2	v_2= -6	v_3= -1	v_4= 0	v_5= M	
	CT_1	D_1	D_2	D_3	D_4	D_F	
u_1= 26	U_A	26 +θ > (2)	20 120	25 - θ 80	28 <	M <	200
u_2= 23	U_B	28 <	21 <	24 <	23 160	M <	160
u_3= 27	U_C	30 <	22 <	26 50	27 10	M <	60
u_4= 28	U_D	30 100 -θ	23 <	**M** < +θ	28 10	M 30	140
	b_j	100	120	130	180	30	

$\Theta = 10$

$\Delta CT_1 = 10 (-2) = - 20$ UM

$CT_2 = CT_1 + \Delta CT_1 = 12930 - 20 = 12910$ UM.

		v_1= 2	v_2= -6	v_3= -1	v_4= 0	v_5= M	
	CT_2	D_1	D_2	D_3	D_4	D_F	
u_1= 26	U_A	26 +θ > (2)	20 120	25 - θ 80	28 <	M <	200
u_2= 23	U_B	28 <	21 <	24 <	23 160	M <	160
u_3= 27	U_C	30 <	22 <	26 +θ 50	27 10 -θ	M <	60
u_4= 28	U_D	30 -θ 100	23 <	**M** <	28 10 +θ	M 30	140
	b_j	100	120	130	180	30	

	CT_2	$v_1 = 26$ D_1	$v_2 = 20$ D_2	$v_3 = 25$ D_3	$v_4 = 24$ D_4	$v_5 = M-4$ D_F	
$u_1 = 0$	U_A	26 10 **+θ**	20 120 **-θ**	25 70	28 <	M <	200
$u_2 = -1$	U_B	28 <	21 <	24 =	23 160	M <	160
$u_3 = 1$	U_C	30 <	22 <	26 60	27 <	M <	60
$u_4 = 4$	U_D	30 90 **-θ**	23 > (1) **+θ**	**M** <	28 20	M 30	140
	b_j	100	120	130	180	30	

$\Theta = 90$

$\Delta CT_2 = 90\ (-1) = -90$ UM

$CT_3 = CT_2 + \Delta CT_2 = 12910 - 90 = 12820$ UM.

	CT_3	$v_1 = 26$ D_1	$v_2 = 20$ D_2	$v_3 = 25$ D_3	$v_4 = 25$ D_4	$v_5 = M-3$ D_F	
$u_1 = 0$	U_A	26 100	20 30	25 70	28 <	M <	200
$u_2 = -2$	U_B	28 <	21 <	24 <	23 160	M <	160
$u_3 = 1$	U_C	30 <	22 <	26 60	27 <	M <	60
$u_4 = 3$	U_D	30 <	23 90	**M** <	28 20	M 30	140
	b_j	100	120	130	180	30	

La solution optimale est unique.

Min CT = CT_3 = 12820 UM.