Corrigés d'exercices de la série N° 03 (Algèbre 1)

Exercice 1 :

1) • La forme exponentielle de Z_3 :

D'abord, on écrit Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle :

• $Z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

1) $|Z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

2) $\theta_1 = \arg(Z_1)$:

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$$

D'où : $\boxed{Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$ --- (1)

• $Z_2 = 1 - i$.

1) $|Z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

2) $\theta_2 = \arg(Z_2)$:

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$$

D'où : $\boxed{Z_2 = \sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}}$ --- (2)

De (1) et (2), on obtient :

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\boxed{Z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

• La forme trigonométrique de Z_3 :

$$Z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

2) La forme algébrique de Z_3 :

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$$

$$= \frac{(1 + i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{1 + i + i\sqrt{3} + i^2\sqrt{3}}{(1 - i^2)}$$

$$= \frac{1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} \qquad / \boxed{i^2 = -1}$$

$$\boxed{Z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

3) $\cos\theta$, $\sin\theta$, ?? $\left(\theta = \arg(Z_3) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right)$

On a :

$$Z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ --- (3)}$$

et

$$Z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ --- (4)}$$

On compare (3) et (4), on trouve :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

4) $Z_3^{20} = ??$

On a : $Z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$, donc :

$$Z_3^{20} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{20} \cdot \left(e^{i\frac{7\times 20\pi}{12}}\right)$$

$$= 2^{10} \cdot e^{i\frac{140\pi}{12}}$$

Maintenant, on cherche l'argument principale de Z_3^{20}, on a :

$$\frac{140\pi}{12} = \frac{140\pi + 4\pi - 4\pi}{12}$$

$$= \frac{144\pi - 4\pi}{12}$$

$$= \frac{144\pi}{12} - \frac{4\pi}{12}$$

$$= 12\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\pi}{3} + 2\times 6\pi$$

$$= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k = 6$$

Donc :

$$Z_3^{20} = 2^{10} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{10}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1024\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{Z_3^{20} = 512 - i\,512\sqrt{3}}.$$

Exercice 2 :

1) $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$:

- $P(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) + 63$

$$= i^4(\sqrt{3})^4 - 6i^3(\sqrt{3})^3 + 24i^2(\sqrt{3})^2 - 18i\sqrt{3} + 63$$

$$= 9 + \cancel{18i\sqrt{3}} - 72 - \cancel{18i\sqrt{3}} + 63$$

$$= 72 - 72 = 0$$

- $P(-i\sqrt{3}) = (-i\sqrt{3})^4 - 6(-i\sqrt{3})^3 + 24(-i\sqrt{3})^2 - 18(-i\sqrt{3}) + 63$

$$= 9 - \cancel{18i\sqrt{3}} - 72 + \cancel{18i\sqrt{3}} + 63$$

$$= 72 - 72 = 0$$

Comme $P(i\sqrt{3}) = 0$ et $P(-i\sqrt{3}) = 0$, alors les complexes $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ (qui sont des imaginaires pur) sont des solutions du polynôme P.

De plus, il existe un polynôme Q du 2ème degré tq :

$$P(z) = (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})\,Q(z)$$

$$= (z^2 - (i\sqrt{3})^2)\,Q(z)$$

$$= (z^2 + 3)\,Q(z).$$

2) On détermine le polynôme Q :

Pour trouver Q, on effectue la division euclidienne :