

$$c - \bar{a} - d = Q(z) = \frac{P(z)}{z^2 + 3}$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{z^4} - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 & \boxed{z^2 + 3} \\ \hline \cancel{z^4} & \cancel{z^2} - 6z + 21 \\ 0 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 & \boxed{Q(z)} \\ \hline -6z^3 & \\ -18z & \\ \hline 0 & 21z^2 + 0 + 63 \\ -21z^2 & \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

D'où :

$$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$$

$$3) P(z) = 0 ??$$

$$\text{on a : } P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 3 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 - 6z + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet z^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - i\sqrt{3} = 0 \\ \text{ou} \\ z + i\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = i\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ z = -i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\bullet z^2 - 6z + 21 = 0 \dots (*)$$

on calcule le discriminant $\Delta =$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(21) \\ &= 36 - 84 \\ &= -48 = 48i^2 \end{aligned}$$

Donc l'équation (*) admet deux solutions complexes

conjuguées (car $\Delta < 0$) :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{48i^2}}{2} \\ &= \frac{6 - \sqrt{16 \times 3 i^2}}{2} \\ &= \frac{6 - 4\sqrt{3}i}{2} = 3 - 2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{48i^2}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}i$$

$$(z_1 = \bar{z}_2 \text{ et } z_2 = \bar{z}_1)$$

D'où :

$$S = \{i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}i, 3 + 2\sqrt{3}i\}$$

Exercice 3 :

1) on remplace z dans (1), on obtient :

$$\begin{aligned} z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i \\ = 8 - (3+i)4 - (2+5i)2 + 8 + 14i \\ = 8 - 12 - 4i - 4 - 10i + 8 + 14i \\ = 16 - 16 - 14i + 14i \\ = 0 \end{aligned}$$

D'où : z est une solution réelle de l'équation (1).

2) On détermine a, b et $c =$

on a :

$$\begin{aligned} (z-2)(az^2+bz+c) \\ = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c \\ = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c \\ \downarrow \dots (**)\end{aligned}$$

Par identification entre (1) et (*), on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 & \dots (1) \\ b - 2a = -3 - i & \dots (2) \\ c - 2b = -2 - 5i & \dots (3) \\ -2c = 8 + 14i & \dots (4) \end{cases}$$

De (1), on a : $\boxed{a = 1}$

De (4), on a : $\boxed{c = -4 - 7i} \dots (5)$

on remplace (5) dans (3), on trouve :

$\boxed{b = -1 - i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - i \\ c = -4 - 7i \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} Z^3 - (3+i)Z^2 - (2+5i)Z + 8 + 14i \\ = (Z-2)(Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i) \end{aligned}}$$

3) Les solutions de (1) :

On a :

$$Z^3 - (3+i)Z^2 - (2+5i)Z + 8 + 14i = 0$$

$$\Leftrightarrow (Z-2)(Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z - 2 = 0 \\ \text{ou} \\ Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 2 \\ \text{ou} \\ Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i = 0 \end{cases}$$

On remarque que l'équation $Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i = 0 \dots (*)$ est une équation du 2^{ème} degré à coefficients complexes.

($a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{C}$), donc :

On calcule le discriminant Δ de cette équation :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (-(1+i))^2 - 4(1)(-4-7i) \\ &= 1 - 1 + 2i + 16 + 28i \\ &= 16 + 30i = \delta^2 \quad (\delta \text{ racine carrée de } \Delta) \end{aligned}$$

On pose : $\delta = x + iy$, donc :

$$\Delta = \delta^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow 16 + 30i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 & \dots (1) \\ 2xy = 30 & \dots (2) \\ x^2 + y^2 = 34 & \dots (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 & \dots (1) \\ 2xy = 30 & \dots (2) \\ x^2 + y^2 = 34 & \dots (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 & \dots (1) \\ 2xy = 30 & \dots (2) \\ x^2 + y^2 = 34 & \dots (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pm 5}$$

$$(3) - (1) \Rightarrow 2y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \pm 3}$$

Maintenant, d'après (2), les réels x et y sont de même signe, donc

$$\delta = 5 + 3i \quad \text{ou} \quad \delta = -5 - 3i$$

Les solutions de (*) sont :

$$Z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{1+i - 5-3i}{2} = -2 - i$$

$$Z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{1+i + 5+3i}{2} = 3 + 2i$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation (1) est :

$$S = \{2, -2 - i, 3 + 2i\}.$$

Fin