

NOMBRES COMPLEXES - EXERCICES CORRIGÉS

Exercice n°1.

On donne $z = 3 + \sqrt{3}i$ et $z' = -1 + 2i$

Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants : $z_1 = z - \bar{z}'$; $z_2 = z \cdot \bar{z}$; $z_3 = z^2$; $z_4 = z^3$; $z_5 = \frac{z}{z'}$

Exercice n°2.

1) Calculer i^2 , i^3 et i^4

2) En déduire la valeur de i^{2006} et de i^{2009} , puis les entiers naturels n tels que i^n est imaginaire pur

3) Déterminer les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif.

Exercice n°3.

Résoudre dans \mathbb{C} :

1) Les équations $5z + 2i = (1+i)z - 3$ et $\frac{z-i}{z+1} = 4i$

2) Le système d'inconnues complexes z_1 et z_2 : $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1 - 7i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$

3) Les équations $2z + i\bar{z} = 3$ et $z^2 + z \cdot \bar{z} = 0$

4) Les équations $-2z^2 + 6z - 5 = 0$ et $(z^2 + 2)(z^2 - 4z + 4) = 0$

Exercice n°4.

Pour tout complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, $z \neq -1$, on considère le complexe z' défini par : $z' = \frac{z-i}{z+1}$

1) On note $z' = x' + iy'$, avec x' et y' réels. Exprimer x' et y' en fonction de x et y

2) Déterminer l'ensemble M des points d'affixe z tels que z' soit réel.

Exercice n°5.

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A,B,C et D d'affixes respectives :

$z_A = -1 - 5i$, $z_B = 4 - 3i$, $z_C = 3 + 3i$ et $z_D = -2 + i$

1) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

2) Déterminer l'affixe du point C', symétrique du point C par rapport à D

3) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

4) Quelle est la nature du quadrilatère A'BC'D ?

Exercice n°6.

On considère le polynôme $P(z)$ suivant : $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$

1) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1

2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$

3) Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2

4) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$

5) On note z_3 la 3^{ème} solution de l'équation $P(z) = 0$. Démontrer que les points du plan complexe A,B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 , sont alignés

Exercice n°7.

Déterminer le module, un argument et une forme exponentielle de chacun des nombres donnés :

$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. En déduire module et argument de $z_1 \cdot z_2$, $z_1 \cdot z_3$ et $(z_2)^2$

Exercice n°8.

Ecrire $1+i\sqrt{3}$ et $1-i$ sous la forme trigonométrique et simplifier : $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$

Exercice n°9.

Affirmation	VRAI	FAUX
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$		
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $ \bar{z} = z $		
Pour $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $z = z' \Leftrightarrow z = z' $		
Si $\operatorname{Re}(z) < -2$, alors $ z > 2$		
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $ 1+iz = \sqrt{1+z^2}$		

Exercice n°10.

Déterminer et représenter dans chaque cas, l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation donnée :

- 1) $|z - 3| = |z - 3i|$
- 2) $|2 - 3i + z| = |2 + 3i|$
- 3) $|\bar{z} - 4 + i| = 1$
- 4) $\arg(\bar{z}) = \arg(-z) \ (2\pi)$

Exercice n°11.

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution

2) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions z_1 et z_2

3) Déterminer le module et un argument de $(z_1)^2$ et $(z_2)^2$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A,B,A' et B' d'affixes respectives :

$1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-2+2i\sqrt{3}$ et $-2-2i\sqrt{3}$

4) Déterminer la nature du quadrilatère AA'B'B

5) Démontrer que le triangle AA'B' est rectangle.

6) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1+i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$.

Exercice n°12.

Pour tout nombre complexe z , on définit : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$

1) Calculer $P(2)$. Déterminer une factorisation de $P(z)$ par $(z-2)$

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$

On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive.

Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 .

3) a) Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), les points :

A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2 , et I milieu de [AB]

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle.

En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OI})$

c) Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I

d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$

Exercice n°13.

On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1) Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$. Déterminer le polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$

3) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm) les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$

4) On note E le symétrique de D par rapport à O. Placer le point E sur le dessin. Montrer que $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et déterminer la nature du triangle BEC

Exercice n°14.

z étant un complexe, on note (S) le système $\begin{cases} |z| = |z - 6| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) Donner le module et un argument des trois complexes suivants : $a = \sqrt{3} + i$ $b = -2 + 2i$ $c = 3 + 3i$

2) Parmi les complexes a , b et c , lesquels sont solutions du système (S) ? (justifier la réponse).

3) M étant le point d'affixe z , et A étant le point d'affixe 6, traduire géométriquement les deux contraintes de (S) .

4) Résoudre le système (S) par la méthode de votre choix.

Exercice n°15.

Soit le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

On définit dans P une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'affixes z_n définies par :

$$z_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n, z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$$

1) Calculer z_n en fonction de n .

2) Pour tout entier naturel n , calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$

En déduire la nature du triangle $OM_n M_{n+1}$ et montrer que : $M_n M_{n+1} = kOM_{n+1}$, où k est un réel strictement positif à déterminer.

3) Si r_n est le module de z_n , donner la limite de r_n si n tend vers plus l'infini. Quelle interprétation géométrique peut-on donner?

Exercice n°16.

On considère l'application f du plan qui à tout point M, d'affixe z distincte de $2i$, associe le point d'affixe :

$$z' = \frac{z + i}{z - 2i}$$

1) Pour $z \neq 2i$, on pose $z = 2i + re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Ecrire $z' - 1$ à l'aide de r et θ

2) A est le point d'affixe $2i$

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M pour lesquels $|z' - 1| = 3$

b) Déterminer l'ensemble E_2 des points M pour lesquels $\arg(z' - 1) = \frac{\pi}{4}$ (2π)

c) Représenter les ensembles E_1 et E_2

Exercice n°17.

- 1) Déterminer la forme complexe de la rotation r de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Préciser l'image par r du point A d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

- 2) Soit t la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $z_1 = z - \sqrt{3}i$

a) Caractériser la transformation t

b) Donner la forme complexe de $t \circ r$

Reconnaitre cette nouvelle transformation en déterminant ses éléments caractéristiques

Exercice n°18.

On définit la transformation f du plan par sa forme complexe :

$$z' + 3 - 4i = 2(z + 3 - 4i)$$

- 1) Quelle est la nature de l'application f ?

- 2) Déterminer l'image C' par f du cercle C de centre $A(-2+i)$ et de rayon 1

NOMBRES COMPLEXES - CORRECTION

Exercice n°1

$$z_1 = z - \bar{z} = 3 + \sqrt{3}i - (-1 - 2i) = 3 + \sqrt{3}i + 1 + 2i = \boxed{4 + (\sqrt{3} + 2)i}$$

$$z_2 = z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |3 + \sqrt{3}i|^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2 = \boxed{12}$$

$$z_3 = z^2 = (3 + \sqrt{3}i)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2 = 9 + 6\sqrt{3}i + (\sqrt{3})^2(i)^2 = 9 + 6\sqrt{3}i - 3 = \boxed{6 + 6\sqrt{3}i}$$

$$z_4 = z'^3 = (-1 + 2i)^3 = (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 \times (2i) + 3 \times (-1)^1 \times (2i)^2 + (2i)^3$$

$$= -1 + 6i - 3 \times (-4) + 8i^3 = -1 + 6i + 12 + 8i \times \underbrace{i^2}_{=-1} = -1 + 6i + 12 - 8i = \boxed{11 - 2i}$$

$$z_5 = \frac{z}{z'} = \frac{3 + \sqrt{3}i}{-1 + 2i} = \frac{(3 + \sqrt{3}i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \frac{-3 - 3 \times 2i - \sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i^2}{(-1)^2 - (2i)^2}$$

$$= \frac{-3 - 6i - \sqrt{3}i + 2\sqrt{3}}{1 - (-4)} = \frac{2\sqrt{3} - 3 - i(6 + \sqrt{3})}{5} = \boxed{\frac{2\sqrt{3} - 3}{5} - i \frac{6 + \sqrt{3}}{5}}$$

Exercice n°2

1) On calcule successivement $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = \boxed{-i}$ et $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = \boxed{1}$

2) La division euclidienne de 2006 par 4 fournit $2006 = 4 \times 501 + 2$

Ainsi, $i^{2006} = i^{4 \times 501 + 2} = i^{4 \times 501} \times i^2 = (i^4)^{501} \times (-1) = (1)^{501} \times (-1) = \boxed{-1}$

La division euclidienne de 2009 par 4 fournit $2009 = 4 \times 502 + 1$

Ainsi, $i^{2009} = i^{4 \times 502 + 1} = i^{4 \times 502} \times i^1 = (i^4)^{502} \times i = (1)^{502} \times i = \boxed{i}$

Notons q et r le quotient et le reste de la division de n par 4. On a donc $n = 4q + r$ avec $0 \leq r \leq 3$

Si $r=0$, c'est-à-dire si $n=4q$, $i^n = i^{4 \times q} = (i^4)^q = (1)^q = \boxed{1}$

Si $r=1$, c'est-à-dire si $n=4q+1$, $i^n = i^{4 \times q + 1} = i^{4 \times q} \times i^1 = (i^4)^q \times i = (1)^q \times i = \boxed{i}$

Si $r=2$, c'est-à-dire si $n=4q+2$, $i^n = i^{4 \times q + 2} = i^{4 \times q} \times i^2 = (i^4)^q \times i^2 = (1)^q \times (-1) = \boxed{-1}$

Si $r=3$, c'est-à-dire si $n=4q+3$, $i^n = i^{4 \times q + 3} = i^{4 \times q} \times i^3 = (i^4)^q \times i^3 = (1)^q \times (-i) = \boxed{-i}$

Les entiers naturels n tels que i^n est imaginaire pur sont donc de la forme $n=4q+1$ ou $n=4q+3$

3) Déterminons la forme trigonométrique de $1+i$: Le module de $1+i$ est $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Un argument θ de $1+i$ vérifie $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta = \frac{\pi}{4}$ (2π) convient

Ainsi, $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, et pour tout entier naturel, $(1+i)^n = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$

$(1+i)^n$ sera un réel négatif si et seulement si $n \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \boxed{n = 4(2k+1), k \in \mathbb{Z}}$

Les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif sont donc de la forme $\boxed{n = 4(2k+1), k \in \mathbb{Z}}$

Exercice n°3

1)

$$5z + 2i = (1+i)z - 3 \Leftrightarrow z(5 - (1+i)) = -2i - 3 \Leftrightarrow z(4-i) = -2i - 3$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2i - 3}{4-i} = \frac{(-2i-3)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{-8i - 2i^2 - 12 - 3i}{4^2 - i^2} = \frac{2 - 12 - 11i}{16+1} = \boxed{-\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i}$$

Ainsi, $S = \boxed{\left\{-\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i\right\}}$

Pour $z \neq -1$,

$$\frac{z-i}{z+1} = 4i \Leftrightarrow z-i = 4i(z+1) \Leftrightarrow z(1-4i) = 4i+i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{5i}{1-4i} = \frac{5i(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{5i + 20i^2}{1^2 - (4i)^2} = \frac{5i - 20}{1 - (-16)} = \boxed{-\frac{20}{17} + i\frac{5}{17}}$$

Ainsi, $S = \boxed{\left\{-\frac{20}{17} + i\frac{5}{17}\right\}}$

2) On résout le système par combinaison :

$$\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1 - 7i & L_1 \\ iz_1 + 2z_2 = 11i & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6z_1 + 2z_2 = 2 - 14i & 2L_1 \\ iz_1 + 2z_2 = 11i & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (6-i)z_1 = 2 - 14i - 11i & 2L_1 - L_2 \\ iz_1 + 2z_2 = 11i & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{2 - 25i}{6-i} & 2L_1 - L_2 \\ z_2 = \frac{11i - iz_1}{2} & L_2 \end{cases}$$

On obtient donc :

$$z_1 = \frac{2 - 25i}{6-i} = \frac{(2 - 25i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{12 + 2i - 150i - 25i^2}{36 - i^2}$$

$$= \frac{12 + 2i - 150i + 25}{36 + 1} = \frac{37 - 148i}{37} = \boxed{1 - 4i}$$

$$\text{puis } z_2 = \frac{11i - i(1-4i)}{2} = \frac{11i - i + 4i^2}{2} = \frac{-4 + 10i}{2} = \boxed{-2 + 5i}$$

Finalement, $S = \boxed{\{(1-4i; -2+5i)\}}$

3) Si on pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, l'équation $2z + i\bar{z} = 3$ devient équivalente à :

$$2(x+iy) + i(x-iy) = 3 \Leftrightarrow 2x + 2iy + ix - i^2y = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + i(2y + x) = 3$$

donc équivalente au système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$, que l'on résout par substitution :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & L_1 \\ 2y + x = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x & L_1 \\ 2(3 - 2x) + x = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x & L_1 \\ 6 - 4x + x = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x & L_1 \\ x = 2 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y = -1 & L_1 \\ x = 2 & L_2 \end{cases}}$$

Ainsi $S = \boxed{\{2-i\}}$

Si on pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, l'équation $z^2 + z \cdot \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 + |z|^2 = 0$ devient équivalente à :

$$(x+iy)^2 + x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 + x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2ixy = 0$$

donc équivalente au système $\begin{cases} x^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$. Les solutions sont donc tous les couples $\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$, c'est-à-dire tous les nombres imaginaires purs.

4) On calcule le discriminant de l'équation $-2z^2 + 6z - 5 = 0$:

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$$

L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-6-2i}{2 \times (-2)} = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}$ et $z_2 = \frac{-6+2i}{2 \times (-2)} = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

L'équation $(z^2 + 2)(z^2 - 4z + 4) = 0$ se réécrit $(z+i\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})(z-2)^2 = 0$, et admet donc comme ensemble de solutions $S = \{-i\sqrt{2}; i\sqrt{2}; 2\}$

Exercice n°4

1) Pour tout complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, $z \neq -1$, on calcule :

$$z' = \frac{z-i}{z+1} = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{(x+iy-i)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} = \frac{x^2 + x - ixy + iyx + iy - i^2 y^2 - ix - i + i^2 y}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + x + y^2 - y}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{y - x - 1}{(x+1)^2 + y^2}. \text{ Ainsi } \boxed{x' = \frac{x^2 + x + y^2 - y}{(x+1)^2 + y^2}} \text{ et } \boxed{y' = \frac{y - x - 1}{(x+1)^2 + y^2}}$$

2) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \frac{y - x - 1}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow y - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = x + 1}$ M appartient donc à la droite d'équation $y = x + 1$

Exercice n°5

1) On calcule d'une part $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4 - 3i - (-1 - 5i) = 4 - 3i + 1 + 5i = 5 + 2i$,

Et d'autre part $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 3 + 3i - (-2 + i) = 3 + 3i + 2 - i = 5 + 2i$

Puisque $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$, on en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2) Si C' est le symétrique du point C par rapport à D, alors $\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{CD}$, ce qui se traduit par $z_{\overrightarrow{DC'}} = z_{\overrightarrow{CD}}$, c'est-à-dire $z_{C'} - z_D = z_D - z_C \Leftrightarrow z_{C'} = 2z_D - z_C = 2(-2 + i) - (3 + 3i)$

$$= -4 + 2i - 3 - 3i = \boxed{-7 - i}$$

Ainsi $z_{C'} = \boxed{-7 - i}$

3) L'égalité vectorielle $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ se traduit, au niveau des affixes, par :

$$z_{\overrightarrow{DA'}} = z_{\overrightarrow{DB}} + z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow z_{A'} - z_D = z_B - z_D + z_C - z_D$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = z_B + z_C - z_D = 4 - 3i + 3 + 3i - (-2 + i)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{A'} = 9 - i}$$

4) On calcule d'une part $z_{\overrightarrow{A'B}} = z_B - z_{A'} = 4 - 3i - (9 - i) = -5 - 2i$, et d'autre part $z_{\overrightarrow{DC'}} = z_{C'} - z_D = -7 - i - (-2 + i) = -5 - 2i$

Puisque $z_{\overrightarrow{A'B}} = z_{\overrightarrow{DC'}}$, on en déduit que $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{DC'}$, donc que le quadrilatère A'B'C'D est un parallélogramme.

Exercice n°6

1) En réécrivant autrement le polynôme P, à savoir :

$P(z) = z^3 - 22z - 36 + i(9z^2 + 12z - 12) = z^3 - 22z - 36 + 3i(3z^2 + 4z - 4)$, on s'aperçoit que si z_1 est une racine réelle de P, alors on doit avoir nécessairement $z_1^3 - 22z_1 - 36 = 0$ et $3z_1^2 + 4z_1 - 4 = 0$. Cherchons donc les racines réelles du polynôme $R(z) = 3z^2 + 4z - 4$ en calculant son discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 16 + 48 = 64 = 8^2$

d'où l'existence de deux racines réelles $\frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \times 3} = -2$ et $\frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$. Sur ces deux racines, seule -2 est racine du polynôme $S(z) = z^3 - 22z - 36$. Ainsi la seule racine réelle de P est $\boxed{z_1 = -2}$

2) Il existe donc un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - (-2))Q(z) \Leftrightarrow P(z) = (z + 2)Q(z)$, avec $\deg Q = \deg P - 1 = 2$, donc de la forme $Q(z) = az^2 + bz + c$.

Pour trouver Q, effectuons la division euclidienne du polynôme P par $z + 2$ (puisque l'égalité ci-dessus entraîne

$$Q(z) = \frac{P(z)}{z + 2}, \text{ pour tout } z \neq -2$$

On obtient :

Le polynôme Q est donc :

$$\boxed{Q(z) = z^2 + (9i - 2)z - 6(i + 3)}$$

$$\begin{array}{r} z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) \\ \hline z^3 + 2z^2 \\ \hline (9i - 2)z^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) \\ \hline (9i - 2)z^2 + 2(9i - 2)z \\ \hline (-6i - 18)z - 3(4i + 12) \\ \hline (-6i - 18)z - 12i - 36 \\ \hline 0 \end{array}$$

3) On calcule le discriminant du polynôme Q :

$\Delta = (9i - 2)^2 - 4 \times 1 \times (-6(i + 3)) = -81 - 36i + 4 + 24i + 72 = -5 - 12i$. L'astuce est de remarquer que $-5 - 12i = (2 - 3i)^2$, ce qui permet de calculer les deux racines complexes de Q : L'une vaut $\frac{-(9i - 2) - (2 - 3i)}{2} = \frac{-6i}{2} = -3i$ et l'autre vaut $\frac{-(9i - 2) + (2 - 3i)}{2} = \frac{-12i + 4}{2} = -6i + 2$. L'équation $Q(z) = 0$ admet donc une solution imaginaire pure : $\boxed{z_2 = -3i}$

4) L'autre solution de l'équation $Q(z) = 0$ ayant été calculée ci-dessus, et par application de la règle du produit nul, $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 2)Q(z) = 0 \Leftrightarrow z + 2 = 0$ ou $Q(z) = 0$ et ainsi $\boxed{S = \{-2; -3i; -6i + 2\}}$

5) Notons A le point d'affixe $z_1 = -2$, B le point d'affixe $z_2 = -3i$ et C le point d'affixe $z_3 = -6i + 2$

L'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} vaut $z_2 - z_1 = -3i + 2$. Celle du vecteur \overrightarrow{AC} vaut $z_3 - z_1 = -6i + 4$

Puisque $z_3 - z_1 = 2(z_2 - z_1)$, on en déduit que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, c'est à dire que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires, donc que les points A, B et C sont alignés

Exercice n°7

Le module de z_1 vaut $|\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Un argument θ de z_1 vérifie $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$. $\theta = -\frac{\pi}{6}$ convient

Ainsi, $z_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Le module de z_2 vaut $\left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Un argument θ de z_2 vérifie $\cos \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ convient

$$\text{Ainsi, } z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{Pour } z_3, \text{ on reconnaît directement } z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Le module de z_3 vaut donc 1, un argument $\frac{2\pi}{3}$. Une forme exponentielle est donc $z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$\text{On calcule } z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Le module de $z_1 \cdot z_2$ vaut donc 2 et un argument de $z_1 \cdot z_2$ est donc $\frac{\pi}{12}$

$$\text{On calcule } z_1 \cdot z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Le module de $z_1 \cdot z_3$ vaut donc $2\sqrt{2}$ et un argument de $z_1 \cdot z_3$ est donc $-\frac{\pi}{2}$

$$\text{On calcule } (z_2)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times e^{-i\frac{2 \times 3\pi}{4}} = \frac{1}{2} \times e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Le module de $(z_2)^2$ vaut donc $\frac{1}{2}$ et un argument de $(z_2)^2$ est donc $\frac{\pi}{2}$

Exercice n°8

Notons $z_1 = 1+i\sqrt{3}$. Alors le module de z_1 est $|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Pour trouver un argument de z_1 ,

cherchons θ tel que $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve $\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

De même, notons $z_2 = 1-i$. Alors le module de z_2 est $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Pour trouver un argument de z_2 ,

cherchons θ tel que $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$. Ainsi $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Le quotient $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ s'écrit donc $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

$$\text{Alors } z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} = (\sqrt{2})^{20} e^{i\frac{20 \times 7\pi}{12}} = \left((\sqrt{2})^2\right)^{10} e^{i\frac{140\pi}{12}}$$

$$\text{Comme } 140 = 6 \times 24 - 4, \text{ on aura } \frac{140\pi}{12} = \frac{6 \times 24\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = 6 \times 2\pi - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\text{Ainsi } e^{i\frac{140\pi}{12}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Enfin, } \left((\sqrt{2})^2\right)^{10} = 2^{10} = 1024 \text{ En conclusion } z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 1024 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \boxed{= 512 - 512\sqrt{3}i}$$

Exercice n°9

- 1) « Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$ » est **VRAIE**. En effet ; pour tout complexe $z = x + iy$, (x et y réels), z imaginaire pur $\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z = -iy$
- 2) « Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = -|z|$ » est **FAUX**. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$
- 3) « Pour $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ » est **FAUX**. Exemple : deux complexes.
- 4) « Si $\operatorname{Re}(z) < -2$, alors $|z| > 2$ » est **VRAI**. En effet, si $z = x + iy$, (x et y réels), et si $x < -2$, alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2} > 2$, c'est-à-dire $|z| > 2$
- 5) « Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|1 + iz| = \sqrt{1 + z^2}$ » est **FAUX**. exemple : $z = -i$

Exercice n°10

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$,

- 1) Si on note A et B les points dont les affixes respectives sont 3 et $3i$, et M le point dont l'affixe est noté z , l'égalité $|z - 3| = |z - 3i|$ se traduit par $AM = BM$. Le point M étant équidistant des points A et B, il appartient à la médiatrice de [AB]. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 3| = |z - 3i|$ est donc la médiatrice de [AB], avec A(3) et B($3i$)

- 2) Notons C le point dont l'affixe est $-2+3i$

Puisque $|2+3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, l'égalité $|2-3i+z| = |2+3i| \Leftrightarrow |z - (-2+3i)| = \sqrt{13}$ se traduit par $CM = \sqrt{13}$

Le point M appartient donc au cercle de centre C et de rayon $\sqrt{13}$. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|2-3i+z| = |2+3i|$ est donc le cercle de centre C($-2+3i$) et de rayon $\sqrt{13}$

- 3) Si on pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, l'égalité $|\bar{z} - 4 + i| = 1$, équivalente à $|\bar{z} - 4 + i|^2 = 1^2 = 1$, se réécrit

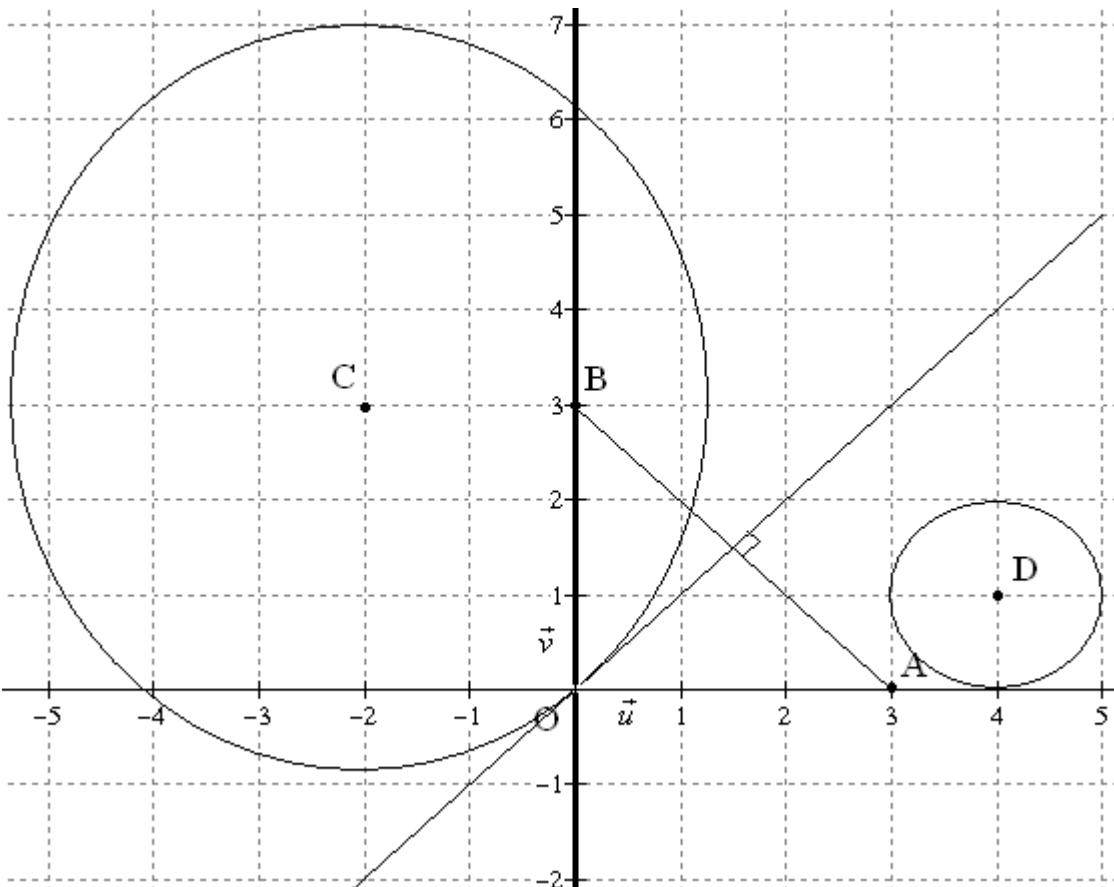
$$|x - iy - 4 + i|^2 = 1 \Leftrightarrow |x - 4 - i(y - 1)|^2 = 1 \Leftrightarrow [(x - 4)^2 + (y - 1)^2] = 1$$

On reconnaît là l'équation du cercle de centre D(4 ; 1) et de rayon 1

L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|\bar{z} - 4 + i| = 1$ est donc le cercle de centre D($4+i$) et de rayon 1

- 4) Puisque pour tout complexe z , $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ (2π) et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$ (2π), l'égalité $\arg(\bar{z}) = \arg(-z)$ (2π) se réécrit $-\arg(z) = \arg(z) + \pi$ (2π), soit $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ (π).

L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ (2π) est donc l'axe des imaginaires purs, privé du point O



Exercice n°11

1) Le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$. L'équation admet donc deux solutions

complexes conjuguées $z_1 = \frac{2+i\sqrt{12}}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = \boxed{1+i\sqrt{3}}$ et $z_2 = \frac{2-2i\sqrt{3}}{2} = \boxed{1-i\sqrt{3}}$

2) On calcule $|z_1| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = \boxed{2}$ et $|z_2| = |1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = \boxed{2}$.

Si on note $\theta_1 = \arg(z_1)[2\pi]$, alors $\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{3}[2\pi]}$ et $\begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta_2 = -\frac{\pi}{3}[2\pi]}$

3) On calcule $(z_1)^2 = (1+i\sqrt{3})^2 = -2+2i\sqrt{3}$ et $(z_2)^2 = (1-i\sqrt{3})^2 = -2-2i\sqrt{3}$.

On a alors $|(z_1)^2| = |-2+2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = \boxed{4}$ (remarque : $|(z_1)^2| = |z_1|^2$). De même $|(z_2)^2| = \boxed{4}$.

Si on note $\alpha_1 = \arg(z_1^2)[2\pi]$, alors $\begin{cases} \cos(\alpha_1) = \frac{-2}{4} \\ \sin(\alpha_1) = \frac{2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}[2\pi]}$ et $\begin{cases} \cos(\alpha_2) = \frac{-2}{4} \\ \sin(\alpha_2) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]}$

4) On calcule $z_{AB} = z_B - z_A = -2i\sqrt{3}$ et $z_{A'B'} = z_{B'} - z_{A'} = -4i\sqrt{3}$. On constate que $z_{A'B'} = 2z_{AB}$.

On en conclut que $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$, donc $(A'B') \parallel (AB)$, donc le quadrilatère AA'B'B est un trapèze

5) On calcule respectivement : $AA' = |z_{A'} - z_A| = |-3+i\sqrt{3}| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12}$,

$$A'B' = |z_{B'} - z_{A'}| = |-4i\sqrt{3}| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3} = \sqrt{48} \text{ et } AB' = |z_{B'} - z_A| = |-3-3i\sqrt{3}| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36}$$

L'égalité $A'B'^2 = AA'^2 + AB'^2$ nous affirme que le triangle AA'B' est rectangle en A

6) L'égalité $|z - 1+i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$, réécrite en $|z - (1-i\sqrt{3})| = 2\sqrt{3}$, se traduit par $BM = 2\sqrt{3}$. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1+i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ est donc le cercle de centre B et de rayon $2\sqrt{3}$.

Exercice n°12

1) On calcule $P(2) = 2^3 + 2(\sqrt{2}-1) \times 2^2 + 4(1-\sqrt{2}) \times 2 - 8 = 8 + 8\sqrt{2} - 8 + 8 - 8\sqrt{2} - 8 = 0$

On peut donc factoriser $P(z)$ par $(z-2)$. Il existe donc trois nombres a, b et c , tels que pour tout z , $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$. Déterminons a, b et c par identification. Pour tout z ,

$$(z-2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c. \text{ Ainsi, on aura } (z-2)(az^2 + bz + c) = P(z) \text{ pour tout } z \text{ si}$$

$$= az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$$

et seulement si $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=2(\sqrt{2}-1) \\ c-2b=4(1-\sqrt{2}) \\ -2c=-8 \end{cases}$, ce qui nous permet d'obtenir $\begin{cases} a=1 \\ b=2\sqrt{2} \\ c=4 \end{cases}$.

Ainsi, pour tout z , $P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$

2) D'après la règle du produit nul, $P(z) = 0$ si et seulement si $z-2=0 \Leftrightarrow z=2$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

On calcule le discriminant de cette dernière équation : $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 8 - 16 = -8 = (2\sqrt{2}i)^2$

L'équation $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ admet donc deux racines complexes conjuguées :

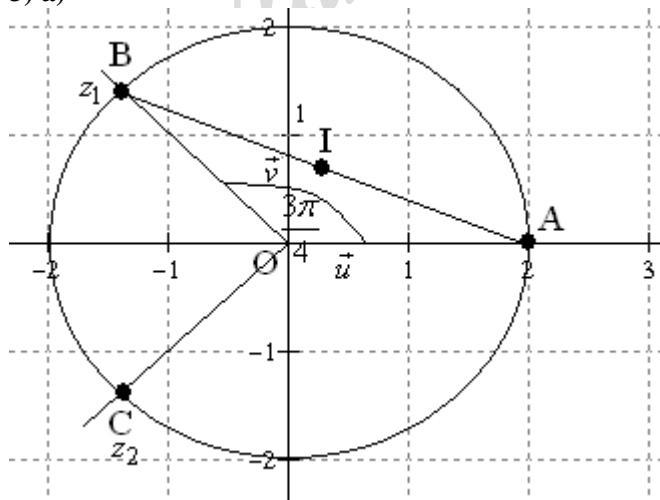
$$z_1 = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \text{ et } z_2 = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}{2} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i. \text{ On vérifie que } z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}.$$

Le module de z_1 vaut $|\sqrt{2} + \sqrt{2}i| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$

Un argument θ de z_1 vérifie $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (2π) convient

Puisque les racines z_1 et z_2 sont conjuguées, le module de z_2 est le même que celui de z_1 , à savoir 2, et un argument de z_2 est $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ (2π).

3) a)



b) On calcule $OA = |z_A| = |2| = 2$ et $OB = |z_1| = 2$. Puisque $OA=OB$, le triangle OAB est isocèle en O.

Puisque le triangle OAB est isocèle en O, la médiane (OI) issue de O est aussi bissectrice de l'angle \widehat{AOB} .

Une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OI})$ est donc $\frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{8}$

c) Puisque I est le milieu de [AB], $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

Le module de z_I vaut donc $\left| 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \sqrt{1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

d) Puisque $(\vec{u}; \overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8}$ (2π), on a donc $\arg(z_I) = \frac{3\pi}{8}$ (2π)

Et puisque $z_I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, on en déduit alors que $\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{|z_I|} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$, et que

$$\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{|z_I|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

Exercice n°13

1) On calcule :

$$\begin{aligned} P(i\sqrt{3}) &= (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) + 63 = (\sqrt{3})^4 i^4 - 6(\sqrt{3})^3 i^3 + 24(\sqrt{3})^2 i^2 - 18i\sqrt{3} + 63 \\ &= ((\sqrt{3})^2)^2 \left(\frac{i^2}{-1} \right)^2 - 6(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3}) \frac{i^2}{-1} \times i + 24(\sqrt{3})^2 \frac{i^2}{-1} - 18i\sqrt{3} + 63 \\ &= 9 + 18\sqrt{3}i - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 = -63 + 63 \boxed{= 0} \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} P(-i\sqrt{3}) &= (-i\sqrt{3})^4 - 6(-i\sqrt{3})^3 + 24(-i\sqrt{3})^2 - 18(-i\sqrt{3}) + 63 = (-\sqrt{3})^4 i^4 - 6(-\sqrt{3})^3 i^3 + 24(-\sqrt{3})^2 i^2 + 18i\sqrt{3} + 63 \\ &= ((-\sqrt{3})^2)^2 \left(\frac{i^2}{-1} \right)^2 - 6(-\sqrt{3})^2 \times (-\sqrt{3}) \frac{i^2}{-1} \times i + 24(-\sqrt{3})^2 \frac{i^2}{-1} + 18i\sqrt{3} + 63 \\ &= 9 - 18\sqrt{3}i - 72 + 18i\sqrt{3} + 63 = -63 + 63 \boxed{= 0} \end{aligned}$$

Les complexes $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ sont donc racines sur polynôme P.

Ainsi, il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels tels que :

$$P(z) = (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})Q(z) \Leftrightarrow P(z) = (z^2 - (i\sqrt{3})^2)Q(z) \Leftrightarrow P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$$

Pour trouver Q, on effectue une division entre polynômes : Pour tout z différent de $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$, on a

$$Q(z) = \frac{P(z)}{z^2 + 3}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{Q(z) = z^2 - 6z + 21}$$

$$\begin{array}{r} z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 \\ \hline z^4 + 3z^2 \\ \hline -6z^3 + 21z^2 - 18z + 63 \\ -6z^3 - 18z \\ \hline 21z^2 + 63 \\ 21z^2 + 63 \\ \hline 0 \end{array}$$

2) Puisque $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$, la règle du produit nul affirme que $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 3 = 0$. Ou $z^2 - 6z + 21 = 0$ Résolvons l'équation $z^2 - 6z + 21 = 0 \Leftrightarrow Q(z) = 0$ en calculant le discriminant du polynôme Q : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 21 = 36 - 84 = -48$. Le polynôme Q admet donc deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-(-6) + i\sqrt{48}}{2 \times 1} = \frac{6 + 4i\sqrt{3}}{2} = 3 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 3 - 2i\sqrt{3}$$

3) cf fin d'exercice

4) Si E est le symétrique de D par rapport à O, alors $z_E = -z_D = -(3 - 2i\sqrt{3}) = -3 + 2i\sqrt{3}$

$$\text{On calcule alors } \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}}$$

On multiplie numérateur et dénominateur de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})}{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - i\sqrt{3} + 3}{(-1)^2 - (i\sqrt{3})^2} = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On détermine module et argument de $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

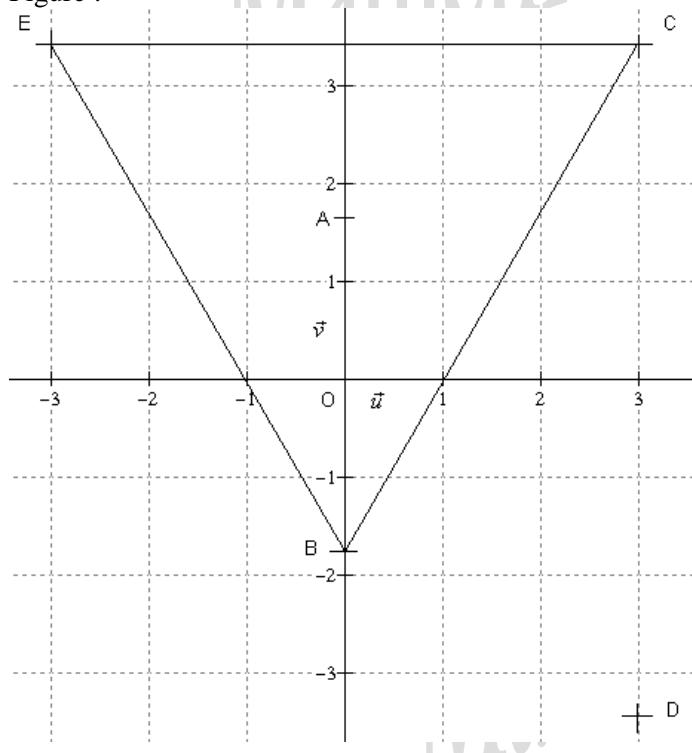
Le module de ce complexe vaut $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$. On cherche ensuite θ tel que $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ On trouve } \theta = -\frac{\pi}{3}[2\pi]. \text{ Ainsi } \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

De l'égalité précédente, on déduit que $\left| \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} \right| = \left| e^{-i\frac{\pi}{3}} \right| \Leftrightarrow \frac{BC}{BE} = 1 \Leftrightarrow BC = BE$, donc le triangle BEC est isocèle en B.

De plus $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$, donc le triangle BEC est finalement équilatéral

Figure :



Exercice n°14

1) On calcule $|a| = \sqrt{3+i} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Le module de a vaut donc 2, et on cherche θ tel que $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin \theta = \frac{1}{2}$. On trouve $\theta = \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Un argument de a est donc $\frac{\pi}{6}$

On calcule $|b| = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Le module de b vaut donc $2\sqrt{2}$, et on cherche θ tel que

$\cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$. Un argument de b est donc $\frac{3\pi}{4}$

On calcule $|c| = |3+3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Le module de c vaut donc $3\sqrt{2}$, et on cherche θ tel que

$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sin $\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Un argument de c est donc $\frac{\pi}{4}$

2) La condition $\arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ permet déjà d'éliminer les complexes a et b . Seul le complexe c est candidat. On calcule $|c-6| = |3+3i-6| = |-3+3i| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Comme $|c-6| = |c|$, le complexe c est le seul à vérifier le système (S)

3) La contrainte $|z| = |z-6| \Leftrightarrow |z-0| = |z-6|$ se traduit par la condition géométrique $OM = AM$. La contrainte $\arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ se traduit par la condition géométrique $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4) Les complexes solutions du système (S) sont les affixes des points d'intersection de la médiatrice de [OA] et de la droite formée des points M tels que $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire la 1^{ère} bissectrice. Ces deux droites n'ayant qu'un seul point d'intersection, on en déduit que le système (S) n'admet qu'un seule solution. Cette solution est le complexe c , comme démontré précédemment.

Exercice n°15

1) La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$

Forme exponentielle de $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$: $|q| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, et si on note θ un argument de q , à

2π près, on a $\cos(\theta) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où on reconnaît $\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et ainsi $q = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(on pouvait aussi directement remarquer que $q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$)

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $z_n = z_0 \times q^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, puisque $z_n \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} &= \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n - z_n}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n} = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}-1}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}-\frac{4}{4}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} \\ &= \frac{-3+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-i^2(\sqrt{3})^2}{1-(i\sqrt{3})^2} = \frac{4\sqrt{3}i-3+3}{4} = \boxed{\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

En calculant module et argument de ce dernier complexe, on obtient $\left| \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} \right| = |\sqrt{3}i| \Leftrightarrow \frac{M_n M_{n+1}}{OM_{n+1}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$M_n M_{n+1} = \sqrt{3} OM_{n+1}$ (le réel k dont parle l'énoncé est $\sqrt{3}$). De plus, $\arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right) = \arg(\sqrt{3}i)[2\pi] \Leftrightarrow$

$$\boxed{(\overrightarrow{OM_{n+1}}, \overrightarrow{M_n M_{n+1}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]} \text{ donc le triangle } OM_n M_{n+1} \text{ est rectangle en } M_{n+1}$$

3) Nous avons calculé, dans la question 1), que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $z_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$. Ainsi $\boxed{r_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n}$, et puisque

$0 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0}$, donc le point M_n a pour position limite le point O lorsque n tend vers plus l'infini.

Exercice n°16

1) Pour tout $z \neq 2i$, on calcule $z' - 1 = \frac{z+i}{z-2i} - 1 = \frac{z+i}{z-2i} - \frac{z-2i}{z-2i} = \frac{3i}{z-2i}$

Si on pose $z = 2i + re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $z' - 1 = \frac{3i}{z-2i} = \frac{3i}{2i+re^{i\theta}-2i} = \frac{3i}{re^{i\theta}} = \frac{3i}{r}e^{-i\theta}$

Enfin, on peut écrire $z' - 1 = \frac{3i}{r}e^{-i\theta} = \underbrace{\frac{3}{r}e^{i\frac{\pi}{2}}}_{1}e^{-i\theta} = \boxed{\frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}$

2) a) Un point M aura une affixe z vérifiant $|z' - 1| = 3$ si et seulement si :

$$\left| \frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \right| = 3 \Leftrightarrow \left| \underbrace{\frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}_1 \right| = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{r} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{r} = 1 \Leftrightarrow \boxed{r = 1}$$

Ainsi, on aura $z = z_A + e^{i\theta} \Leftrightarrow z - z_A = e^{i\theta}$, ce qui implique $|z - z_A| = |e^{i\theta}| = 1 \Leftrightarrow AM = 1$ et $\arg(z - z_A) = \theta \ (2\pi)$.

Le point M appartient donc au cercle de centre A et de rayon 1. E_1 est donc le cercle de centre A et de rayon 1.

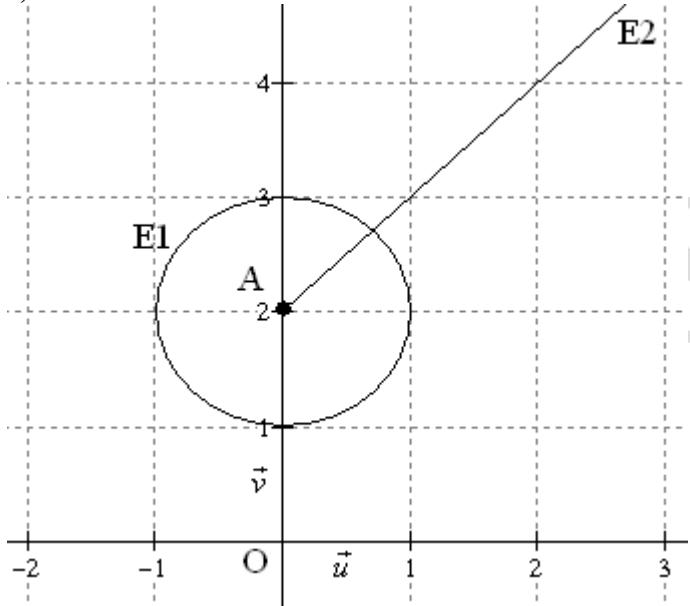
b) Puisque $z' - 1 = \frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$, on aura $\arg(z' - 1) = \frac{\pi}{2} - \theta \ (2\pi)$. Un point M aura une affixe z vérifiant

$\arg(z' - 1) = \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$ si et seulement si : $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{4} \ (2\pi) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$. Ainsi $z - z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc

$(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$. Le point M appartient donc à la demi-droite d'origine A et d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$

E_2 est donc la demi-droite d'origine A et d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$

c)

Exercice n°17

1) La rotation r de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est la transformation qui, à tout z associe $z' = r(z)$ tel que

$$z' - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' + 1 = e^{i\frac{\pi}{3}} (z + 1) \Leftrightarrow \boxed{z' = e^{i\frac{\pi}{3}} (z + 1) - 1}, \text{ ou encore } \boxed{z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}}$$

$$\text{L'image par } r \text{ du point A d'affixe } e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ a pour affixe } z'_A = r(z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1\right) - 1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \boxed{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\text{L'image par } r \text{ du point A d'affixe } e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ est le point d'affixe } \boxed{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

2) a) Si on note \vec{w} le vecteur d'affixe $-\sqrt{3}i$, alors la transformation t est la translation de vecteur \vec{w}

b) Pour tout complexe z ,

$$\begin{aligned} t \circ r(z) &= t(r(z)) = t\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \sqrt{3}i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Déterminons les éventuels points fixes de cette transformation, en résolvant l'équation :

$$t \circ r(z) = z$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = z \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow e^{i\frac{2\pi}{3}}z = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

On reconnaît l'affixe du point A. L'unique point fixe de la transformation $t \circ r$ est le point A

$$\text{En écrivant simultanément } t \circ r(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}z_A - e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$\text{on obtient, par soustraction, } t \circ r(z) - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$$

$$\text{La transformation } t \circ r \text{ est donc la rotation de centre A et d'angle } \frac{\pi}{3}$$

Exercice n°18

1) Déterminons les éventuels points fixes de cette transformation, en résolvant l'équation :

$$z' = z \Leftrightarrow z = 2(z + 3 - 4i) - 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow z = 2z + 6 - 8i - 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow z = -3 + 4i$$

La transformation f admet un point fixe Ω , d'affixe $z_\Omega = -3 + 4i$.

En écrivant successivement $z' = 2z + 3 + 4i$ et $z_\Omega = 2z_\Omega + 3 + 4i$, puis en soustrayant membre à membre, on obtient :

$$z' - z_\Omega = 2(z - z_\Omega).$$

La transformation f est donc l'homothétie de centre Ω , d'affixe $z_\Omega = -3 + 4i$, et de rapport 2

2) Par l'homothétie f de centre Ω et de rapport 2, l'image C' du cercle C de centre $A(-2+i)$ et de rayon 1 est le cercle de centre $f(A)$ et de rayon $2 \times 1 = 2$.

On calcule :

$$f(A) = 2(-2 + i) + 3 + 4i = -4 + 2i + 3 + 4i = -1 + 6i$$

L'image de C est le cercle C' de centre le point $f(A)$ d'affixe $-1 + 6i$ et de rayon 2.