

Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✂ EXAMEN ✂

Exercice 1 : (7 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{3u_n + 3} \end{cases}$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 2$.
 - Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
 - En Dédire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
 - On pose $A = \{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer s'ils existent l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de A .
-

Exercice 2 : (10 points)

1. On considère la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
 - Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f' .
2. Montrer qu'il existe au moins $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $\sin(1+\alpha) = \alpha$.
3. Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que $\forall x > 0$:

$$\frac{2}{(1+x)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} < \frac{2}{x^3}.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^x$.

Exercice 3 : (3 points)

Calculer les limites suivantes : 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^3-3x+2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x\sqrt{x+1}-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \right).$

Bon Courage

Analyse I

Université A.MIRA-Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025-2026

✂ Corrigé de l'examen ✂

Exercice 1 :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{3u_n + 3} \end{cases}$$

a. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 2$.

Pour $n = 0$, on a $0 \leq (u_0 = 0) < 2$. (la propriété est vraie pour $n = 0$). Supposons que pour un certain rang $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 2$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} < 2$. On a $u_n \geq 0 \Rightarrow$

$$7u_n + 4 \geq 4 > 0 \text{ et } 3u_n + 3 \geq 3 > 0, \text{ d'où } u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{3u_n + 3} \geq 0.$$

$$\text{Par ailleurs } u_{n+1} - 2 = \frac{7u_n + 4}{3u_n + 3} - 2 = \frac{7u_n + 4 - 6u_n - 6}{3u_n + 3} = \frac{u_n - 2}{3u_n + 3} < 2, \text{ d'où } u_{n+1} < 2.$$

Donc $0 \leq u_{n+1} < 2$. Alors par récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 2}$. **1.5**

b. Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{7u_n + 4}{3u_n + 3} - u_n = \frac{7u_n + 4 - 3u_n^2 - 3u_n}{3u_n + 3} \\ &= \frac{-3u_n^2 + 4u_n + 4}{3u_n + 3} = \frac{-3(u_n + \frac{2}{3})(u_n - 2)}{3u_n + 3}. \end{aligned}$$

Or $0 \leq u_n < 2$, alors $\frac{-3(u_n + \frac{2}{3})(u_n - 2)}{3u_n + 3} > 0$. Donc (u_n) est **strictement croissante**. **1.5**

c. Convergence de la suite (u_n) : La suite (u_n) croissante et majorée par 2, donc d'après le théorème de la convergence monotone : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$. **0.5**

▷ Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \Rightarrow \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} \Rightarrow \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7u_n + 4}{3u_n + 3} \Rightarrow \ell = \frac{7\ell + 4}{3\ell + 3} \Rightarrow$
 $3\ell^2 + 3\ell = 7\ell + 4 \Rightarrow 3\ell^2 - 4\ell - 4 = 0$. $\Delta = 16 + 48 = 64$, alors l'équation $3\ell^2 - 4\ell - 4 = 0$ admet deux solutions distinctes $\ell_1 = -\frac{2}{3}$ et $\ell_2 = 2$. Comme $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}. \quad \mathbf{1}$$

2. Étude de l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$:

Ensemble des majorants de A : L'ensemble des majorants de A est $\boxed{[2, +\infty[}$. **0.5**

Borne supérieure de A : $\boxed{\sup(A) = 2}$. **0.5**

Maximum de A : $\sup(A) = 2 \notin A, \Rightarrow \boxed{\max(A) \text{ n'existe pas}}$. **0.25**

Ensemble des minorants de A : L'ensemble des minorants de A est $\boxed{]-\infty, 0]}$. **0.5**

Borne inférieure de A : $\boxed{\inf(A) = u_0 = 0}$. **0.5**

Minimum de A : $\boxed{\min(A) = \inf(A) = 0}$. **0.25**

Exercice 2 :

1. Considérons la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a. Continuité de f sur $\mathbb{R}$

• Sur l'intervalle $] -\infty, 0[$, la fonction f est continue (composition et quotient de fonctions continues, avec dénominateur non nul). **0.25**

• Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction f est continue (composition de fonctions continues). **0.25**

• Continuité de f en 0 :

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \frac{\sin(x^3)}{x^3} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = 1. \\ \triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = 0. \end{aligned}$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$, donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur $(]-\infty, 0[\cup \{0\} \cup]0, +\infty[= \mathbb{R})$. **1**

b. Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

• Sur l'intervalle $] -\infty, 0[$, la fonction f est dérivable (composition et quotient de fonctions dérivables, avec dénominateur non nul). **0.25**

• Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable (composition de fonctions dérivables). **0.25**

• Dérivabilité de f en 0 :

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = 1 = f'_g(0).$$

Donc f est dérivable à gauche en 0. **0.75**

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ (FI).}$$

D'après la règle de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en 0. **0.75**

0.5

Comme $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$, alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. Donc La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3x^3 \cos(x^3) - 2 \sin(x^3)}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \mathbf{1}$$

2. Soit la fonction $g(x) = \sin(1+x) - x$ définie sur $\mathbb{R}$. On a :

- $g(0) = \sin(1) - 0 = \sin(1) \approx 0.841 > 0$ **0.25**
- $g(1) = \sin(2) - 1 \approx 0.909 - 1 = -0.091 < 0$ **0.25**

Comme g est continue sur $[0, 1]$ (somme de fonctions continues) et $g(0) \cdot g(1) < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists \alpha \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$, ce qui implique : $\boxed{\exists \alpha \in]0, 1[\text{ tel que } \sin(1 + \alpha) = \alpha}$. **1.5**

3. Pour tout nombre réel x strictement positif, la fonction $h(t) = \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que :

$$h(x+1) - h(x) = (x+1-x) \cdot h'(c) \quad \mathbf{0.75}$$

Or $\boxed{h'(t) = -\frac{2}{t^3}}$, donc :

$$\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = 1 \cdot \left(-\frac{2}{c^3}\right) = -\frac{2}{c^3}.$$

D'où :

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{c^3}.$$

On a $x < c < x+1$, donc $x^3 < c^3 < (x+1)^3 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^3} < \frac{1}{c^3} < \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{2}{c^3} < \frac{2}{x^3}$. Comme $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{c^3}$, alors

$$\boxed{\frac{2}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{2}{x^3}}. \quad \mathbf{0.75}$$

▷ **Calcul de** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^x$

Comme $\frac{2}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{2}{x^3}$, alors $\frac{2e^x}{(x+1)^3} < \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^x < \frac{2e^x}{x^3}$. **0.5**

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{(x+1)^3} = \frac{+\infty}{+\infty}$. En appliquant la règle de l'hôpital trois fois, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{(x+1)^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{3(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{6(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{6} = +\infty \end{aligned}$$

Par comparaison on obtient :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^x = +\infty} \quad \mathbf{1}$$

Exercice 3 :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^3-3x+2}$, on a :

$$\frac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^3-3x+2} = \frac{x(x-1)\sin(x-1)}{(x-1)(x^2+x-2)} = \frac{x(x-1)\sin(x-1)}{(x-1)(x-1)(x+2)} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{\sin(x-1)}{(x-1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^3-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x+2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} = \boxed{\frac{1}{3}}. \text{ 1}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} = 1.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} &= \frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x+1-3}{(1-x)(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)} \\ &= -\frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)} = -\frac{(x+2)}{(x^2+x+1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{(x^2+x+1)} = \boxed{-1}. \text{ 1}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x\sqrt{x+1}-6)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{x\sqrt{x+1}-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} &= \frac{(x\sqrt{x+1}-6)(x\sqrt{x+1}+6)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x\sqrt{x+1}+6)(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{(x^2(x+1)-36)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x\sqrt{x+1}+6)(x-3)} \\ &= \frac{(x^2+4x+12)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x\sqrt{x+1}+6)(x-3)} = \frac{(x^2+4x+12)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x\sqrt{x+1}+6)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x\sqrt{x+1}-6)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2+4x+12)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x\sqrt{x+1}+6)} = \boxed{\frac{11\sqrt{3}}{2}}. \text{ 1}$$