Université Abderrahmane MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Sciences et Technologie
$1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs ST-TM

Janvier 2026
08H30-10H00

# Examen d'Algèbre 1 :(Session normale)

***Exercice 1 : (06 pts)***

I. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\Re$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; x\Re y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} : e^{x+a} = e^{y}$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0.

II. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $S$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \;\; (x, y)S(x', y') \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in [-1, +1] : (x = x' + \alpha) et (y = y' + \beta)$$

1. Montrer que $S$ est réflexive et symétrique.
2. Vérifier que $(1, 2)S(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})S(1, 2)$. Donner une conclusion. .

***Exercice 2 : (06 pts)***

Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1 - \frac{3}{1+|x|}$

1. Calculer $f\{(2, -2)\}$, $f^{-1}(\{-3\})$.
2. L'application $f$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : -2 \leq f(x) < 1$.
4. Montrer que $g : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow [-2, 1[$ telle que : $g(x) = f(x)$ est bijective ; puis donner l'application réciproque $g^{-1}$.

***Exercice 3 : (6 pts)***

On considère le polynôme $P$ défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$$

1. Calculer $P(-2)$.
2. Déterminer le polynôme $Q$ à coéfficients complexes qui vérifie, pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$P(z) = (z + 2)Q(z)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

***Questions de cours : (2 pts)***

1- Peut-on avoir une relation binaire à la fois d'ordre et d'équivalence ?. Si oui, donner un exemple.
2- Que peut-on dire d'une application $f : E \longrightarrow F$ qui vérifie : $\exists y \in F, \forall x \in E : y \neq f(x)$.

**Bonne chance**

## Corrigé de l'examen d'Algèbre 1 (Session normale)

**Exercice 1 : (6 pts)**

I. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\Re$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ x\Re y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} : e^{x+a} = e^{y}$$

1. Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   a) Réflexivité de $\Re$ :
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
   $e^{x+0} = e^{x}$, donc $\exists a = 0 \in \mathbb{Z} : e^{x+a} = e^{x}$, d'où $\Re$ est réflexive.
   b) symétrie de $\Re$ :
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a
   $$\begin{array}{rcl} x\Re y & \Longrightarrow & e^{x+a} = e^{y}/a \in \mathbb{Z} \\ & \Longrightarrow & e^{x} = e^{y-a} \\ & \Longrightarrow & e^{y+a'} = e^{x}/a' = -a \end{array}$$
   alors $\exists a' \in \mathbb{Z} : e^{y+a'} = e^{x}$ , donc $y\Re x$, d'où $\Re$ est symétrique.
   c) Transitivité de $\Re$ :
   Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\Re y$ et $y\Re z$. On a
   $$\left\{\begin{array}{l} x\Re y \\ \text{ et} \\ y\Re z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists a \in \mathbb{Z} : e^{x+a} = e^{y} \\ \text{ et} \\ \exists b \in \mathbb{Z} : e^{y+b} = e^{z} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists a \in \mathbb{Z} : e^{x+a} = e^{y}....(1) \\ \text{ et} \\ \exists b \in \mathbb{Z} : e^{y} \times e^{b} = e^{z}....(2) \end{array}\right.$$
   On remplace (1) dans (2), on trouve :
   $$e^{x+a} \times e^{b} = e^{z} \Longrightarrow e^{x+(a+b)} = e^{z},$$
   donc $\exists c = a + b \in \mathbb{Z} : e^{x+c} = e^{z}$
   d'où $\Re$ est transitive.
   Conclusion : de a), b) et c), $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. La classe d'équivalence de 0 :
   $$\begin{array}{rcl} \overline{0} & = & \{x \in \mathbb{R}, x\Re 0\} \\ & = & \left\{x \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{Z} : e^{x+a} = e^{0}\right\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{Z} : x + a = 0\} \\ & = & \{-a/\ a \in \mathbb{Z}\} \\ & = & \mathbb{Z}. \end{array}$$

II. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $S$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ \ (x, y)S(x', y') \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in [-1, +1] : (x = x' + \alpha) et (y = y' + \beta)$$

1. * Montrons que $S$ est réflexive.
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $(x = x + 0)$ et $(y = y + 0)$ . Alors $\exists \alpha = \beta = 0 \in [-1, +1] : (x = x + \alpha)$ et $(y = y + \beta)$. Donc $(x, y)S(x, y)$. c'est -à- dire $S$ est réflexive.
   * Montrons que $S$ est symétrique.
   Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on a :
   $$\begin{array}{rcl} (x, y)S(x', y') & \Longrightarrow & (x = x' + \alpha) \text{ et} (y = y' + \beta),\ \text{avec } \alpha, \beta \in [-1, +1] \\ & \Longrightarrow & (x' = x - \alpha) \text{ et} (y' = y - \beta),\ \text{avec } -\alpha, -\beta \in [-1, +1] \\ & \Longrightarrow & (x' = x + \alpha') \text{ et} (y' = y + \beta'),\ \text{avec } \alpha' = -\alpha, \beta' = -\beta \\ & \Longrightarrow & (x', y')S(x, y) \end{array}$$
   Alors $S$ est symétrique.

2. On a $(1,2)S(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ :
   En effet ; pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, on a $(1 = \frac{1}{2} + \alpha)$ et $(2 = \frac{3}{2} + \beta)$ donc $(1,2)S(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.
   D'autre part, $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})S(1,2)$ :
   En effet ; pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$, on a $(\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2})$ et $(\frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2})$ donc $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})S(1,2)$.
   Ce qui preuve que $S$ n'est pas antisymétrique, car $(1,2) \neq (\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

**Exercice 2 : (6 pts)**

II. Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - \frac{3}{1+|x|}$.

1. $$f\{(2,\,-2)\} = \{f(x)/x \in \{-2,2\}\} = \{f(-2),(2)\} = \{0\}.$$
   $$\begin{aligned} f^{-1}(\{-3\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{-3\}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/1 - \tfrac{3}{1+|x|} = -3\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\tfrac{3}{1+|x|} = 4\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/4 + 4|x| = 3\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/|x| = -\tfrac{1}{4}\right\} = \varnothing \end{aligned}$$

2. $f$ n'est-elle injective, car $f(-2) = f(2)$ mais $-2 \neq 2$.
   $f$ n'est pas surjective, car $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = -3$.
   $f$ n'est pas bijective, car $f$ n'est pas injective ( ou $f$ n'est pas surjective).

3. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R} : -2 \leq f(x) < 1$.
   On a : $\forall x \in \mathbb{R}$ :
   $|x| \geq 0 \Longrightarrow 1 + |x| \geq 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{1+|x|} \leq 1 \Longrightarrow 0 < \frac{3}{1+|x|} \leq 3 \Longrightarrow -3 \leq -\frac{3}{1+|x|} < 0 \Longrightarrow$
   $-2 \leq 1 - \frac{3}{1+|x|} < 1$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R} : -2 \leq f(x) < 1$.

4. Soit l'application $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [-2,1[$ définie par $g(x) = f(x)$.
   Montrons que l'application $g$ est bijective et donnons l'application réciproque $g^{-1}$.
   L'application
   $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & [-2,1[ \\ x & \longmapsto & g(x) = 1 - \frac{3}{1+x} \end{array}$$
   est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ , donc elle est bijective.

   Soit $y \in [-2,1[: y = g(x)$, donc
   $y = 1 - \frac{3}{1+x} \Longrightarrow \frac{3}{1+x} = 1 - y \Longrightarrow (1+x)(1-y) = 3 \Longrightarrow x - y - xy = 2 \Longrightarrow$
   $x(1-y) = y + 2 \Longrightarrow x = \dfrac{y+2}{1-y} \geq 0$. Donc application réciproque :
   $$g^{-1} : \begin{array}{ccc} [-2,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longrightarrow & x = \dfrac{y+2}{1-y}. \end{array}$$

**Exercice 3 : (6 pts)**

Soit le polynôme $P$ défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$$

1. $$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^3 + 9i(-2)^2 + 2(6i - 11)(-2) - 3(4i + 12) \\ &= -8 + 36i - 24i + 44 - 12i - 36 \\ &= -36i + 36i - 44 + 44 = 0. \end{aligned}$$

2. Déterminons le polynôme $Q$ à coéfficients complexes qui vérifie, pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$P(z) = (z+2)Q(z)$$

Soit $Q(z) = az^2 + bz + c/a, b, c \in \mathbb{C}$
On a
$P(z) = (z+2)Q(z) \Longleftrightarrow z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = az^3 + (b+2a)z^2 + (c+2b)z + 2c.$
Par identification on obtient :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 9i \\ c + 2b = 2(6i - 11) \\ 2c = -3(4i + 12) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 9i - 2 \\ c = -6i - 18 \end{cases}$$
donc $Q(z) = z^2 + (9i - 2)z + -6i - 18.$

3. Les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
$$\begin{aligned} P(z) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (z+2)(z^2 + (9i-2)z - 6i - 18) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} (z+2) = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + (9i-2)z + -6i - 18 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ \text{ou} \\ z^2 + (9i-2)z - 6i - 18 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
Résolvons l'équation
$$z^2 + (9i - 2)z - 6i - 18 = 0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (9i - 2)^2 - 4(-6i - 18) = -81 + 4 - 36i + 24i + 72 = -5 - 12i.$$

Soit $\delta = x + iy$ une des racines carrées de $\Delta$. On a

$$\delta^2 = -5 - 12i \Longleftrightarrow (x + iy)^2 = -5 - 12i \Longleftrightarrow (x^2 - y^2) + i(2xy) = -5 - 12i.$$

D'où,
$$\delta^2 = -5 - 12i \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5....(1) \\ 2xy = -12......(2) \\ x^2 + y^2 = 13.....(3) \end{cases}$$
$(1) + (3) \Longrightarrow x = \pm 2$
$(1) - (3) \Longrightarrow y = \pm 3$
d'après (2), les réels $x$ et $y$ sont de différente signe, donc $\delta = 2 - 3i$ ou $\delta = -2 + 3i$
les solutions de $z^2 + (9i - 2)z - 6i - 18 = 0$ sont :
$$z_1 = \frac{-(9i - 2) - (2 - 3i)}{2} = -3i$$
$$z_1 = \frac{-(9i - 2) + (2 - 3i)}{2} = -6i + 2$$
Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $p(z) = 0$ est

$$S = \{-2, -3i, -6i + 2\}.$$

***Questions de cours : (2 pts)***

1-Oui, la relation " = " est une relation d'ordre et d'équivalence à la fois.
2- L'application $f : E \longrightarrow F$ qui vérifie : $\exists y \in F, \forall x \in E : y \neq f(x)$ n'est pas surjective.