

Corrigé de l'exercice1(07pts)

I. On a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -36$ telle que :

$$u_9 - u_{33} = -96$$

1. Détermination de la raison r (01pts)

Du fait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique, alors deux termes quelconques u_p et u_q de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont liés par cette égalité:

$$u_p = u_q + (p - q)r$$

Ce qui nous donne :

$$r = \frac{u_p - u_q}{p - q}$$

Ainsi, pour $p = 9$ et $q = 33$ on obtient :

$$r = \frac{u_9 - u_{33}}{9 - 33} = \frac{-96}{-24} = 4$$

D'où la raison $r = 4$.

2. L'expression de u_n en fonction de n (01pts)

On sait que $u_n = nr + u_0$, donc $u_n = 4n - 36$.

3. Calcul de u_9 et u_{33} (01pts)

$$\blacksquare u_9 = 4 \times 9 - 36 = 36 - 36 = 0 \quad \blacksquare u_{33} = u_9 + 96 = 0 + 96 = 96.$$

4. Calcul du nombre de termes de la Somme S (01.5pts) On a :

$$u_n = 288 \text{ et } S = u_{33} + u_{34} + \dots + u_n$$

Pour pouvoir déterminer le nombre de termes dans S , on doit tout d'abord déterminer l'indice n du dernier terme u_n de la somme S . On a :

$$u_n = 4n - 36 \Rightarrow n = \frac{u_n + 36}{4} = \frac{288 + 36}{4} = \frac{324}{4} = 81. \text{ Ainsi, } S = u_{33} + u_{34} + \dots + u_{81}. \quad (01pts)$$

$$\text{Et par conséquent, le nombre de termes est : } 81 - 33 + 1 = 49. \quad (0.5pts)$$

5. Calcul de la somme S (01pts)

On sait que la somme des termes successifs d'une suite arithmétique dont le premier terme et le dernier terme de cette somme sont respectivement u_q et u_p est donnée par :

$$S = u_q + u_{q+1} + \dots + u_p = \text{nombre de termes dans la somme} \times \frac{\text{le dernier terme} + \text{le premier terme}}{2}.$$

$$\text{En d'autre terme : } S = u_q + u_{q+1} + \dots + u_p = (p - q + 1) \times \frac{u_p + u_q}{2}.$$

Donc, pour $p = 81$ et $q = 33$ on obtient :

$$S = u_{33} + u_{34} + \dots + u_{81} = 49 \times \frac{u_{81} + u_{33}}{2} = 49 \times \frac{288 + 96}{2} = 49(192) = 9408.$$

II. Calcul de la limite de (u_n) (01.5pts):

$$\blacksquare \lim u_n = \lim \left(\frac{1}{n^3} - n^3 - 3^n \right) = 0 - \infty - \infty = -\infty. \quad (0.5pts)$$

$$\blacksquare \lim u_n = \lim \frac{9^n}{3^{2n-1}} = \lim \frac{9^n}{3^{2n} \times 3^{-1}} = \lim \frac{9^n}{(3^2)^n} \times \frac{1}{3^{-1}} = \lim \frac{9^n}{9^n} \times 3 = 3. \quad (01pts)$$

Fin du corrigé de l'exercice1

Corrigé de l'exercice2(05pts)

I. Résolution de l'équation avec la fonction exponentielle (02pts):

$$-2e^{2x} + 5e^x + 3 = 0 \quad (*)$$

Il est clair que le domaine de définition de l'équation (*) est $\mathcal{D}_{eq} =]-\infty, +\infty[$.

En posant $X = e^x$, on a $X \in]0, +\infty[$ et l'équation (*) peut s'écrire sous la forme : (0.5pts)

$$-2X^2 + 5X + 3 = 0 \quad (**)$$

Son $\Delta = 49 > 0$. Donc, l'équation (**) admet deux solutions :

$$X_1 = \frac{-5-7}{-4} = 3 \in]0, +\infty[\text{ et } X_2 = \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2} \notin]0, +\infty[. \quad (0.5pts)$$

Et par conséquent l'équation (*) admet une seule solution x_1 telle que :

$$e^{x_1} = X_1 \text{ et donc } x_1 = \ln X_1 = \ln 3. \quad (01pts)$$

II. Résolution de l'inéquation avec la fonction exponentielle(03pts):

$$\ln(3x - 2) + \ln x \leq 0 \quad (*)$$

L'inéquation (*) est définie si et seulement si $\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x \in]0, +\infty[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left] \frac{2}{3}, +\infty[\right. \\ x \in]0, +\infty[\end{cases}$

Et par conséquent, le domaine de définition de l'inéquation (*) est :

$$\mathcal{D}_{inq} = \left] \frac{2}{3}, +\infty[\cap]0, +\infty[= \left] \frac{2}{3}, +\infty[. \quad (01pts)$$

De plus, l'inéquation (*) on peut la mettre sous la forme :

$$\ln(3x - 2)x \leq \ln 1 \Leftrightarrow \ln(3x^2 - 2x) \leq \ln 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x \leq 1.$$

Et on obtient la nouvelle inéquation suivante : $3x^2 - 2x - 1 \leq 0. \quad (**)$

La résolution de l'inéquation (**) nous amène à étudier le signe de $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

On a l'équation : $P(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Son $\Delta = 16 > 0$. Il existe deux solutions : $x_1 = \frac{2+4}{6} = 1, x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$.

Et on a le tableau suivant : (0.5pts)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$\text{signe de } P(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

Du tableau, on déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation (**) est :

$$S^{**} = \left[-\frac{1}{3}, 1 \right]. \quad (0.5pts)$$

Et par conséquent, l'ensemble des solutions S^* de l'inéquation (*) est :

$$S^* = S^{**} \cap \mathcal{D}_{inq} = \left[-\frac{1}{3}, 1 \right] \cap \left] \frac{2}{3}, +\infty[= \left] \frac{2}{3}, 1 \right]. \quad (01pts)$$

Fin du corrigé de l'exercice2

Corrigé de l'exercice3(08pts)

I. La recherche des extremums de f en utilisant le teste de la premiere dérivée où : (05pts)

$$f(x) = \frac{x^2}{3x^2 + 5x - 2}$$

Le domaine de Définition $\mathcal{D}_f$

On a : $3x^2 + 5x - 2 = 0$ et le $\Delta = 49 > 0$. Il existe deux solutions : $x_1 = \frac{-5-7}{6} = -2, x_2 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$.

(01pts)

La dérivée

$$f'(x) = \frac{2x(3x^2+5x-2)-(6x+5)x^2}{(3x^2+5x-2)^2} = \frac{6x^3+10x^2-4x-6x^3-5x^2}{(3x^2+5x-2)^2} = \frac{5x^2-4x}{(3x^2+5x-2)^2}.$$

(01pts)

Les points critiques

$$\text{On a : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2-4x}{(3x^2+5x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 4x \Leftrightarrow x(5x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Finalement, f admet deux points critiques : $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{5}$.

(01pts)

Le test

Le test des points critiques par la 1^{ère} dérivée se fait avec ce tableau de variations : (01pts)

x	$-\infty$	-2	0	$1/3$	$4/5$	$+\infty$
signe de f'	+		+		-	+

Du tableau, on déduit que f admet deux extremums :

■ $f(0) = 0$. Un maximum local.

(0.5pts)

■ $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{49}$. Un minimum local.

(0.5pts)

II. Calcul de la dérivée(03pts) :

$$\blacksquare f(x) = \frac{-3}{(x^3-x+3)^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)(3x^2-1)}{(x^3-x+3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{3x^2-1}{(x^3-x+3)^{\frac{4}{3}}}.$$

(01.5pts)

$$\blacksquare f(x) = (x^3 - 4x^2)e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = (3x^2 - 8x)e^{-2x} + (-2e^{-2x})(x^3 - 4x^2)$$

$$= (3x^2 - 8x - 2(x^3 - 4x^2))e^{-2x}$$

$$= (-2x^3 + 11x^2 - 8x)e^{-2x}.$$

(01.5pts)

Fin du corrigé de l'exercice3 et du sujet