

Examen Final d'éléments de Mécanique (Physique 1)

Question de cours (02 points) : Enoncer le théorème de l'énergie mécanique (formule). A quoi sert ce théorème ? Dans quel cas se conserve l'énergie mécanique ?

Exercice 1 (06 points) :

Dans un référentiel $\mathcal{R}(OXY)$ muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j})$, le mouvement d'un point matériel M est décrit par les équations horaires suivantes :

$$x(t) = (bt) \cos(\omega t) ; y(t) = (bt) \sin(\omega t)$$

Où b et ω sont des constantes positives et t le temps.

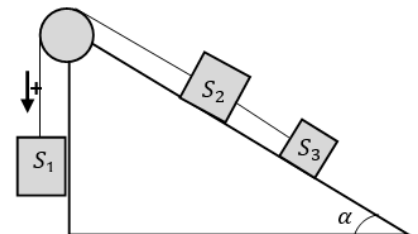
1. Donner les coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$ de M . Trouver l'équation polaire de la trajectoire de M (ρ en fonction de θ ou l'inverse).
2. Dans la base locale des coordonnées polaires $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, déterminer les composantes des vecteurs position $\vec{OM}(t)$, vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ ainsi que leurs modules. Etudier la nature du mouvement de M .
3. Déterminer les composantes tangentielle a_t et normale a_n du vecteur accélération. En déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire.

Exercice 2 : (04 points)

1. En utilisant la troisième loi de Kepler, déterminer la période de révolution T_M de la planète Mars autour du Soleil. Exprimer le résultat en jours puis en années terrestres.
2. Calculer l'accélération de la pesanteur g_M à la surface de Mars. Pour un homme de masse terrestre $m = 80 \text{ kg}$ se trouvant à la surface de Mars. Quelle est sa masse sur Mars ? Calculer son poids sur Mars.
3. Si cet homme peut sauter à une hauteur de 50 cm sur Terre, estimer la hauteur maximale qu'il pourrait atteindre sur Mars. On suppose que la vitesse initiale v_0 du saut est la même sur les deux planètes. On donne : les rayons moyens des orbites de la terre et de Mars ($r_T = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$, $r_M = 2.28 \cdot 10^8 \text{ km}$), période de révolution de la terre ($T_T = 365.25$ jours), masse et rayon de Mars ($M_M = 6.42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$, $R_M = 3.39 \cdot 10^3 \text{ km}$), accélération de la pesanteur sur la surface de la terre ($g_T = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$), constante de gravitation universelle ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$)

Exercice 3 (08 points) :

Trois corps S_1, S_2 et S_3 assimilés à des points matériels de masses $m_1 = 7 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$ et $m_3 = 2 \text{ kg}$, respectivement, sont liés par deux fils inextensibles et de masses négligeables passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Les corps S_2 et S_3 glissent sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 40^\circ$ par rapport à l'horizontale, et le corps S_3 est suspendu (voir figure ci-contre). On suppose l'existence de frottements cinétiques entre les corps S_2 et S_3 et le plan incliné, dont les coefficients sont $\mu_{c1} = \mu_{c2} = \mu_c = 0.25$. On donne $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.



1. En utilisant le PFD, calculer l'accélération commune a du mouvement et les tensions des fils.
2. Au cours du mouvement, on coupe le fil entre les corps S_2 et S_3 :
 - 2.1. Le système $\{S_1, S_2\}$ continue-t-il à se déplacer dans le même sens qu'avant la coupure, ou inverse-t-il son mouvement ? Justifier votre réponse.
 - 2.2. Déduire la nouvelle accélération a' du système $\{S_1, S_2\}$ après la coupure.
 - 2.3. Comparer a' avec l'accélération initiale a . Que constatez-vous ? Justifier physiquement ce résultat.

Corrigé de l'examen final de Physique 1

Questions de cours : (02 points)

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}_{nc}) \quad (0.5)$$

Il permet de relier facilement les vitesses et les positions d'un système sans intégrer directement les équations du mouvement (utiliser le PFD). (0.75)

L'énergie mécanique se conserve si toutes les forces qui travaillent sont conservatives (ou si le travail des forces non conservatives est nul). (0.75)

Exercice 1 : (06 points)

1. Les coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$ de M :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = bt \quad (0.25); \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \omega t \quad (0.25)$$

L'équation polaire de la trajectoire de M :

$$\rho = \left(\frac{b}{\omega}\right) \theta \text{ ou } \theta = \left(\frac{\omega}{b}\right) \rho \quad (0.5)$$

2. Dans la base locale des coordonnées polaires $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, les composantes des vecteurs position $\overrightarrow{OM}(t)$, vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ ainsi que leurs modules :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho = (bt) \vec{e}_\rho \quad (0.5)$$

$$2\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = b\vec{e}_\rho + (bt\omega)\vec{e}_\theta \quad (0.5) \rightarrow v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = b\sqrt{1 + \omega^2 t^2} \quad (0.5)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -(bt\omega^2)\vec{e}_\rho + (2b\omega)\vec{e}_\theta \quad (0.5) \rightarrow a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = b\omega\sqrt{4 + \omega^2 t^2} \quad (0.5)$$

La nature du mouvement de M :

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = (b^2 \omega^2) t > 0 \quad (0.5)$$

Le mouvement de M est accéléré. (0.5)

3. Les composantes tangentielle a_t et normale a_n du vecteur accélération. En déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{b\omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \quad (0.5); \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{b\omega(\omega^2 t^2 + 2)}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \quad (0.5)$$

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \left(\frac{b}{\omega}\right) \frac{(1 + \omega^2 t^2)^{3/2}}{(\omega^2 t^2 + 2)} \quad (0.5)$$

Exercice 2 : (04 points)

1. La période de révolution T_M de la planète Mars autour du Soleil :

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow T_M = T_T \sqrt{\frac{r_M^3}{r_T^3}} = T_T \left(\frac{r_M}{r_T}\right)^{\frac{3}{2}} = 684.4 \text{ jours (0.5)}$$

$$T_M = \frac{684.4}{365.25} = 1.87 \text{ ans (0.5)}$$

2. L'accélération de la pesanteur g_M à la surface de Mars.

Pour un corps de masse m , qui se trouve sur la surface de mars :

$$mg_M = G \frac{mM_M}{R_M^2} \rightarrow g_M = G \frac{M_M}{R_M^2} = 3.72 \text{ m.s}^{-2} \text{ (0.5)}$$

Masse et poids d'un homme de masse $m = 80 \text{ kg}$ se trouvant à la surface de Mars :

$$m_T = m_M = m = 80 \text{ kg (0.5)}$$

$$P_M = mg_M = 297.6 \text{ N (0.5)}$$

3. Hauteur du Saut sur Mars. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique :

$$\text{Sur terre : } \frac{1}{2}mv_0^2 = mg_T h_T \text{ (0.5)}$$

$$\text{Sur Mars : } \frac{1}{2}mv_0^2 = mg_M h_M \text{ (0.5)}$$

$$\text{D'où : } mg_T h_T = mg_M h_M \rightarrow h_M = h_T \frac{g_T}{g_M} = 1.32 \text{ m (0.5)}$$

Exercice 4 : (08 points)

1. En utilisant le PFD, calculer l'accélération commune du mouvement et les tensions des fils :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} (S_1) : \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \text{ (0.25)} \\ (S_2) : \vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 + \vec{f}_{c2} + \vec{T}'_2 = m_2 \vec{a}_2 \text{ (0.25)} \\ (S_3) : \vec{P}_3 + \vec{R}_3 + \vec{T}_3 + \vec{f}_{c3} = m_3 \vec{a}_3 \text{ (0.25)} \end{cases}$$

Projections :

$$(S_1) : \{(Ox) : P_1 - T_1 = m_1 a_1 \text{ (0.25)}; (S_2) : \begin{cases} (OX) : T_2 - T'_2 - P_{2x} - f_{c2} = m_2 a_2 (*) \text{ (0.25)} \\ (Oy) : R_2 - P_{2y} = 0 \text{ (0.25)} \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} (OX) : T_3 - P_{3x} - f_{c3} = m_3 a_3 \text{ (0.25)} \\ (Oy) : R_3 - P_{3y} = 0 \text{ (0.25)} \end{cases}$$

Forces de frottements :

$$f_{c2} = \mu_c R_2 = \mu_c P_{2y} = \mu_c m_2 g \cos \alpha \text{ (0.25)}; f_{c3} = \mu_c R_3 = \mu_c P_{3y} = \mu_c m_3 g \cos \alpha \text{ (0.25)}$$

$$\text{Les fils sont inextensibles et de masses négligeables : } \begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = a \text{ (0.25)} \\ T_1 = T_2 \text{ (0.25)} \\ T'_2 = T_3 \text{ (0.25)} \end{cases}$$

Donc ; $T_2 - T'_2 = T_1 - T_3$ (0.25)

L'équation (*) devient alors :

$$T_1 - T_3 - P_{2x} - f_{c2} = m_2 a \rightarrow P_1 - P_{3x} - f_{c3} - P_{2x} - f_{c2} = (m_1 + m_2 + m_3) a \quad (0.5)$$

Or, d'après les projections, on a :

$$T_1 = P_1 - m_1 a ; T_3 = P_{3x} + f_{c3} + m_3 a$$

Ce qui donne l'expression de l'accélération des corps :

$$\begin{aligned} a &= \frac{P_1 - P_{2x} - f_{c2} - P_{3x} - f_{c3}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{m_1 - (\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha)(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} g \quad (0.5) \\ &= 1.50 \text{ m.s}^{-2} \quad (0.5) \end{aligned}$$

D'où les tensions des fils :

$$T_1 = T_2 = m_1(g - a) = 58.2 \text{ N} \quad (0.25)$$

$$T'_2 = T_3 = m_3 g \sin \alpha + \mu_c m_3 g \cos \alpha + m_3 a = 19.4 \text{ N} \quad (0.25)$$

2. Au cours du mouvement, on coupe le fil entre les corps S_2 et S_3 .

2.1. Sens du mouvement du système $\{S_1, S_2\}$:

$$P_1 - P_{2x} - f_{c2} = m_1 g - m_2 g \sin \alpha - \mu_c m_2 g \cos \alpha = 3.66 \text{ N} \quad (0.50)$$

Donc : $P_1 > P_{2x} + f_{c2}$. Le nouveau système $\{S_1, S_2\}$ garde le même sens d'avant. (0.50)

2.2. La nouvelle accélération a' :

Il suffit de mettre $m_3 = 0$ dans l'expression de a :

$$a' = \frac{m_1 - (\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha) m_2}{m_1 + m_2} g = 3.26 \text{ m.s}^{-2} \quad (0.50)$$

2.3. On remarque que $a' > a$. L'accélération a augmenté après la coupure. En retirant S_3 , la masse totale diminue ($13 \rightarrow 11 \text{ kg}$) et les forces résistantes diminuent aussi (moins de frottements). Le système devient 'plus léger' et s'accélère davantage. (0.50)

