# Examen de Remplacement Physique 1

## Exercice 01 (08 points)

Dans la base plaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ la position d'un mobile $M$ est repéré par ses coordonnées polaires :

$$\rho(t) = 2\cos(2t)\,; \qquad \theta(t) = 2t$$

**1.** Dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$,déterminer :

**1.1** Le vecteur de position, vitesse et accélération du mobile ainsi que leurs modules ?

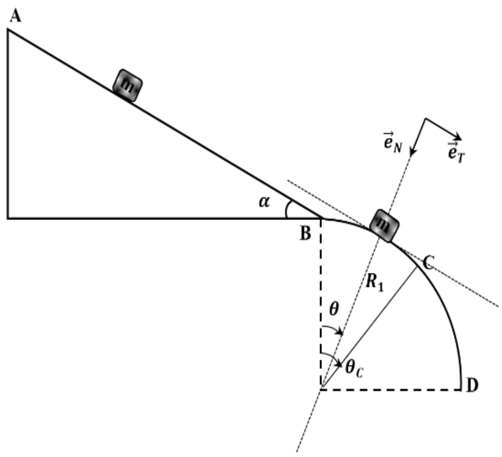
**1.2** Les expressions des composantes tangentielle $a_T$ et normal $a_N$ de l'accélération. Déduire le rayon de courbure $R_C$ de la trajectoire.

**1.3** Les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{e}_T, \vec{e}_N)$ en fonction de $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ ?

**1.4** Si $m$ est la masse du point matériel $M$, déterminer sa quantité de mouvement et la force qu'il subit.

**2.** Déterminer les coordonnées cartésiennes $(x, y)$ de $M$ et monter que la trajectoire du mobile est un cercle de rayon $R = 1$ est de centre $(1{,}0)$?

## Exercices 02 (07 points)




**I.** Une boite de masse $m = 2kg$ considérée ponctuelle est libérée à partir d'un point $A$ sans vitesse initiale $v_A = 0$ sur un chemin $AB$ incliné d'un angle $\alpha = 30°$ et de distance $d = \overline{AB} = 10m.$ On prend $g = 10ms^{-2}$ et on néglige les forces de frottement entre la boite est la piste $AB$.

**a.** Représenter les forces appliquées sur la boite.

**b.** En utilisant le principe fondamental de la dynamique calculer l'accélération de la boite.

**c.** Montrer que la boite arrive au point $B$ avec une vitesse $v_B = 10ms^{-1}$.

**II.** A partir du point $(B)$, la boite poursuive son mouvement sans frottement sur la piste circulaire BD de rayon $R_1 = 20m$ avec une vitesse constante et tangentielle à la trajectoire $v = v_B$ et une accélération normale $a_N = \frac{v^2}{R_1} = \frac{v_B^2}{R_1}$. La boite va quitter la piste au point (C).

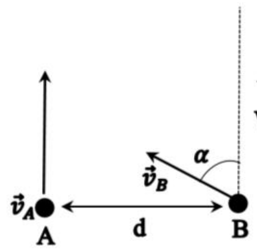
**a.** Représenter les forces appliquées sur la boite.

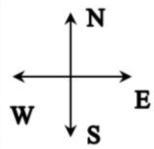
**b.** En appliquant le PFD (2ème loi de Newton), montrer dans la base intrinsèque $(\vec{e}_T, \vec{e}_N)$ que le module de la force de réaction de la piste $R$ est exprimée (suivant la direction radiale $\vec{e}_N$) sous la forme:

$$R = m\left(g\cos\theta - \frac{v_B^2}{R_1}\right)$$

**c.** Déterminer l'angle $\theta_C$ pour laquelle la boite quitte la piste. Déduire la distante $\overline{BC}$ parcourue par la boite sur cette piste.

## Exercice 3 (05 points)




Un bateau **A** se localise à l'ouest d'un autre bateau **B**. Le bateau **A** navigue vers le nord avec une vitesse $v_A$ par rapport à la terre, le bateau B navigue dans la direction nord-ouest en faisant un angle de $\alpha = 60°$ (voir la figue) avec une vitesse $v_B$ par rapport à la terre.

**1-** Déterminer la vitesse et la direction du bateau **B** par rapport au bateau **A**. faites un schéma.

**2-** Quelle sera la plus petite distance minimale $d'$ entre les deux bateaux.

On donne $\boldsymbol{v_A = 30km/h}$ , $\boldsymbol{v_B = 20km/h.}$

**Bonne chance**

# Corrigé

**Exercice 01**

**1.1** Le vecteur de position, vitesse et accélération ainsi que leurs modules

$$\rho = 2\cos(2t)\,, \dot{\rho} = -4\sin(2t), \quad \ddot{\rho} = -8\cos(2t) \quad \textbf{(0.5)}$$

$$\theta = 2t, \dot{\theta} = 2, \ddot{\theta} = 0 \quad \textbf{(0.25)}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho = 2\cos(2t)\,\vec{e}_\rho \quad \textbf{(0.5)} \qquad \|\overrightarrow{OM}\| = 2 \quad \textbf{(0.25)}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 4\sin(2t)\vec{e}_\rho + 4\cos(2t)\,\vec{e}_\theta \quad \textbf{(0.5)} \qquad \|\vec{v}\| = 4 \quad \textbf{(0.25)}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta = -16\cos(2t)\,\vec{e}_\rho - 16\sin(2t)\,\vec{e}_\theta \quad \textbf{(0.5)} \qquad \|\vec{a}\| = 16 \quad \textbf{(0.25)}$$

**1.2**Les expressions de $a_T$ , $a_N$ et le rayon de courbure $R_C$ :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad ; \quad \textbf{(0.5)}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 16 \;; \quad \textbf{(0.5)}$$

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{16}{16} = 1 \quad \textbf{(0.5)}$$

**1.3** Les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{e}_T, \vec{e}_N)$

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \sin(2t)\vec{e}_\rho + \cos(2t)\,\vec{e}_\theta \;; \quad \textbf{(0.5)}$$

$$\vec{e}_N = \frac{\vec{a}_N}{\|\vec{a}_N\|} = \frac{\vec{a} - \vec{a}_T}{\|\vec{a}_N\|} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}_N\|} = \cos(2t)\,\vec{e}_\rho - \sin(2t)\,\vec{e}_\theta \quad \textbf{(0.5)}$$

**1.4** La quantité de mouvement et la force subie par $M$.

$$\vec{P} = m\vec{v} = m\left[4\sin(2t)\vec{e}_\rho + 4\cos(2t)\,\vec{e}_\theta\right] \quad \textbf{(0.5)} \qquad ; \vec{F} = m\vec{a} = m\left(-16\cos(2t)\,\vec{e}_\rho - 16\sin(2t)\,\vec{e}_\theta\right) \textbf{(0.5)}$$

**2** Les coordonnées cartésiennes $(x, y)$ de $M$ et la trajectoire

$x = \rho\cos\theta = 2\cos^2(2t)$ $\qquad$ $y = \rho\sin\theta = 2\cos(2t)\sin(2t)$ **(0.25+0,25)**

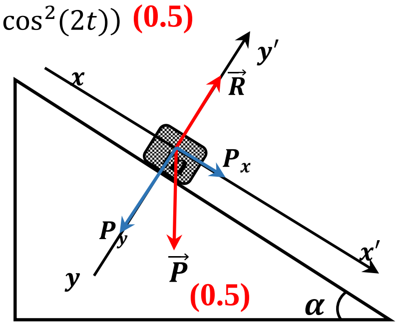
$$x + y^2 = 2\cos^2(2t) + 4cos^2(2t)sin^2(2t) = 2\cos^2(2t) + 2cos^2(2t)(2 - 2cos^2(2t)) \quad \textbf{(0.5)}$$

$$x + y^2 = x + x(2 - x) \rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x^2 - 1)^2 + y^2 = 1 \quad \textbf{(0.5)}$$

**Exercice 02**

**1. a. Bilan de forces**




**1.b L'accélération** $\boldsymbol{a}$ **de la boite** :

En appliquant le PFD :

$\sum \vec{F}_{ex} = m\,\vec{a} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} = m\,\vec{a}$ **(0.5)**

Projection:

$(xx')$: $P_x = m\,a \;\Rightarrow\; a = \frac{P_x}{m} = gsin\alpha = 5ms^{-2}$ **(01)**

**1.c** La vitesse au point B

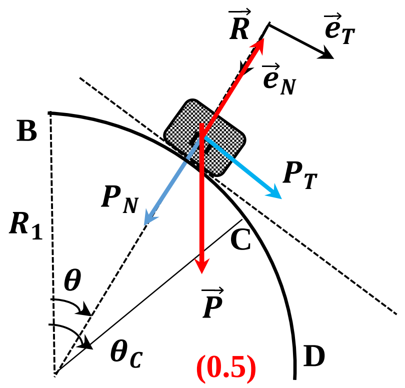
$v_B^2 - v_A^2 = 2ad \rightarrow v_B = \sqrt{2g\ \sin(\alpha)\,d} = 10ms^{-1}$ **(01)**

**2.** Application du PDF:

$\sum \vec{F}_{ex} = m\,\vec{a} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} = m\,\vec{a}$ **(0.25)**

Projection sur $\vec{e}_N$

$-R + P_N = ma_N \rightarrow mgcos(\theta) = m\frac{v^2}{R_C}$ **(0.5)**




On a $v = v_B$ et $R_C = R_1$donc,

$$R = m\left(-g\cos(\theta) + \frac{v_B^2}{R_1}\right) \quad \textbf{(01)}$$

**c. La boite quitte la piste** $\rightarrow R = 0$ **(0.5)**

$$m\left(-g\cos(\theta_c) + \frac{v_B^2}{R_1}\right) = 0 \quad \textbf{(0.5)}$$

$$\cos(\theta_c) = \frac{v_B^2}{R_1 g}$$

$$\theta_c = 60° = \frac{\pi}{3}\, rad \quad \textbf{(0.25)}$$

**La distance parcourue** :

La distance parcourue est la distance de l'arc $\widehat{BC}$ : $\widehat{BC} = R_1\theta_c = 20 * \frac{\pi}{3} = 20.93m$ **(0.5)**

**Exercice 03**

**1.** La vitesse $v_{B/A}$

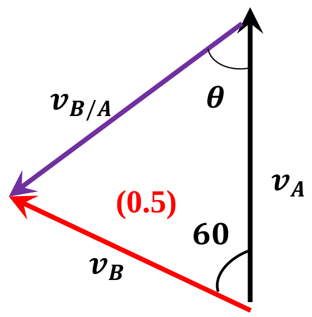
Bateau B : le mobile, Bateau A : le repère mobile, La terre : Repère fixe.

$v_B$ : vitesse absolue, $v_A$ : vitesse d'entrainement.,$v_{B/A}$ : vitesse relative

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \quad \textbf{(0.5)}$$

$$v_{B/A}^2 = v_B^2 + v_A^2 - 2v_A v_B\cos(60)$$

$$v_{B/A} = \sqrt{v_B^2 + v_A^2 - 2v_A v_B\cos(60)} = 10\sqrt{7}km/h \quad \textbf{(0.5)+(0.25)}$$




La direction :

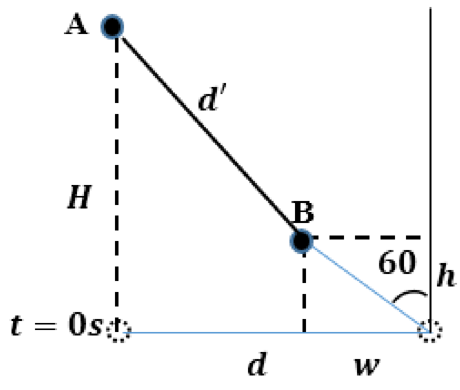
$$\frac{v_B}{\sin(\theta)} = \frac{v_{B/A}}{\sin(60)} \rightarrow \sin(\theta) = \frac{v_{B/A}}{v_B}\sin(60) = 0.6546 \quad \textbf{(0.5)}$$

$$\theta = 40.9° \quad \textbf{(0.25)}$$

**2.** La distance minimale $d'$ :

La position de chaque bateau à l'instant $t$ est représentée sur le schéma suivant:

D'après le schéma




$$d' = \sqrt{(H-h)^2 + (d-w)^2} \quad \textbf{(0.25)}$$

Avec,

$H = v_A t,\, h = v_B\cos(60)\,t,\, w = v_B\sin(60)\,t$ **(01)**

$$d' = \sqrt{(30t - 10t)^2 + \left(10 - 10\sqrt{3}t\right)^2}$$

$$d' = 10\sqrt{4t^2 + \left(1 - \sqrt{3}t\right)^2} \quad \textbf{(0.25)}$$

La distance est minimale $\frac{d(d')}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d(d')}{dt} = 10\frac{4t - \sqrt{3}(1-\sqrt{3}t)}{\sqrt{4t^2 + (1-\sqrt{3}t)^2}} \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{7} heur$ **(0.5)**

$$d' = 10\sqrt{4t^2 + \left(1 - \sqrt{3}t\right)^2} = \frac{20}{\sqrt{7}}km \quad \textbf{(0.5)}$$