

Examen de Remplacement

Exercice 1

Un bloc de masse $m = 1\text{kg}$ peut se déplacer sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale (voir figure), attaché à un ressort parfait de constante de raideur $K = 10\text{N/m}$ tandis que l'autre extrémité est fixée en A. Le contact bloc-piste est caractérisé par le coefficient de frottement statique $\mu_s = 0.7$.

Au moyen du bloc m , on comprime le ressort, puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

- On se propose de déterminer la compression maximale x_0 du ressort pour laquelle m reste toujours au repos.
 - Représenter les forces agissant sur m .
 - En appliquant le PFD, donner l'équation vectorielle des forces et sa projection.
 - Déterminer x_0 la compression maximale pour que le système reste toujours au repos.

On donne : $g = 10\text{m/s}^2$

Exercice 2

Dans un plan OXYZ, une particule M est repérée à tout instant par son vecteur position:

$$\vec{r}(t) = \alpha \cos(\beta t^n) \vec{i} + \alpha \sin(\beta t^n) \vec{j} + \gamma t \vec{k}, \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ et } n \text{ constantes positives}).$$

- Déterminer les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) associées à la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.
- Déterminer les vecteurs position et vitesse de la particule M dans la base des coordonnées cylindriques.
- Démontrer que le vecteur accélération en coordonnées cylindriques s'écrit:

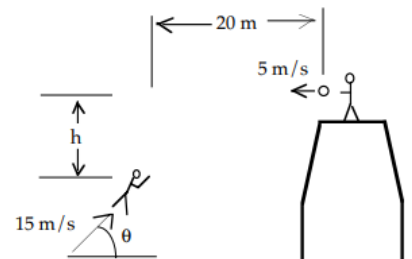
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{k},$$

puis déterminer son vecteur accélération. Donner la condition nécessaire pour que le mouvement soit uniforme.

- Représenter graphiquement le vecteur position et vitesse pour $t = 0$.

Exercice 3

Un acrobate de cirque est projeté par une catapulte avec une vitesse initiale de 15 m s^{-1} sous un angle $\theta = 40^\circ$ au-dessus de l'horizontale, comme indiqué sur la figure. À une distance horizontale de 20 m, son partenaire se tient debout sur une plateforme située à une hauteur h mètres. Au même instant où l'acrobate est lancé, son partenaire lance un ballon de basket horizontalement vers elle avec une vitesse de 5 m s^{-1} . On négligera la résistance de l'air dans toute la résolution du problème.



- Écrire les équations des vitesses horizontale et verticale pour l'acrobate et pour le ballon. Soyez cohérent dans votre choix de l'origine du repère.
- Écrire les équations des positions horizontale et verticale en fonction du temps pour l'acrobate et pour le ballon. Donner le vecteur position de l'acrobate $\vec{OA}$ et du ballon $\vec{OB}$.
- À quel instant l'acrobate et le ballon se trouvent-ils à la même position horizontale ?
- Déterminer la valeur de h pour laquelle l'acrobate attrape le ballon. On supposera que l'acrobate et le ballon doivent être à la même hauteur au moment de la capture.
- Déterminer la norme de la vitesse du ballon relative à l'acrobate au moment précis où celle-ci attrape le ballon.

Correction

Exercice 1

1

b. Au repos

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f}_s = \vec{0}$$

Projection

$$\begin{cases} OX : & T + mg \sin \alpha - f_s = 0 \\ OY : & R - mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

On a $T = -kx$ et $\Delta l = x = l - l_0 < 0$

tel que: $x = -x_0$, ou x_0 est la compression maximal du ressort

$$T = Kx_0$$

De l'équation "OY"

$$\begin{aligned} R &= mg \cos \alpha \\ f_s &= \mu_s mg \cos \alpha \end{aligned}$$

c. On remplace dans l'équation de "OX"

$$Kx_0 + mg \sin \alpha - \mu_s mg \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = mg \frac{\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha}{K}$$

$$x_0 = 10.6 \text{ cm}$$

Exercice 2

1.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\alpha^2 (\cos^2(\beta t^n) + \sin^2(\beta t^n))} = \alpha$$

Pour θ on a

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{y}{x} = \tan(\beta t^n) \\ \Rightarrow \theta &= \beta t^n \end{aligned}$$

et

$$z = \gamma t$$

2. En coordonnées cylindrique

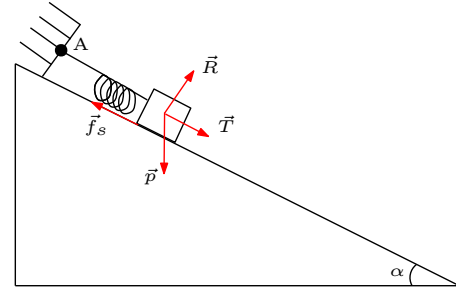
$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k} = \alpha \vec{e}_\rho + \gamma t \vec{k}$$

Aussi on a

$$\begin{aligned} \theta &= \beta t^n \\ \dot{\theta} &= n \beta t^{n-1} \\ \ddot{\theta} &= n(n-1) \beta t^{n-2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha \\ \dot{\rho} &= 0 \\ \ddot{\rho} &= 0 \end{aligned}$$



Maintenant pour le vecteur vitesse

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v} = n\alpha\beta t^{n-1}\vec{e}_\theta + \gamma\vec{k}$$

3. On a

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k})$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

au final

$$\vec{a} = -\alpha n\beta t^{n-1}\vec{e}_\rho + \alpha n(n-1)\beta t^{n-2}\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a} = -\alpha n\beta t^{n-1}(\vec{e}_\rho - (n-1)t^{-1}\vec{e}_\theta)}$$

Pour que le mouvement soit uniforme

$$v = CSt$$

$$v = \sqrt{(n\alpha\beta t^{n-1})^2 + \gamma^2}$$

Pour que v soit constante

$$t^{(n-1)^2} = 1 = t^0$$

$$\Rightarrow n-1 = 0$$

Au final pour que le mouvement soit uniforme:

$$n = 1$$

4.

A $t = 0$ on a

$$\theta = 0$$

$$\rho = \alpha$$

$$\vec{r} = \alpha\vec{e}_\rho$$

Le vecteur position sera porté par l'axe Ox .

Pour le vecteur vitesse on aura

$$\vec{v} = \gamma\vec{k}$$

Le vecteur vitesse sera porté par l'axe Oz .

Exercice 3

$$v_a(0) = 15m.s^{-1}$$

$$v_b(0) = 5m.s^{-1}$$

1. On choisit l'origine de notre repère: Debut du mouvement de l'acrobate

Pour l'acrobate:

a $t = 0$:

$$\vec{v}_a = v_a(0) \cos \theta \vec{i} + v_a(0) \sin \theta \vec{j} = 15 \cos \theta \vec{i} + 15 \sin \theta \vec{j}$$

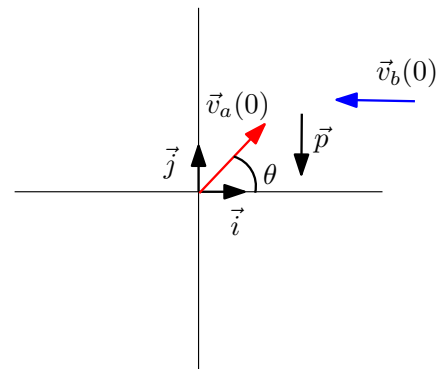
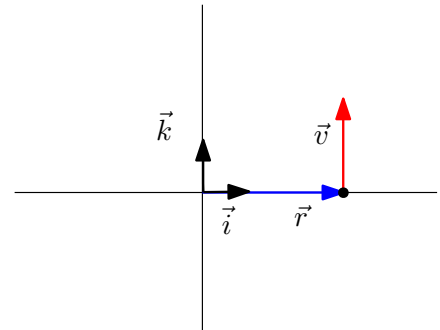
Maintenant calculant l'évolution de la vitesse de l'acrobate au cours du temps.

PFD:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_a \quad \Rightarrow \quad -\vec{p} = m\vec{a}_a$$

Projection:

$$a_{ay} = -g$$



$$\begin{aligned}\frac{dv_{ay}}{dt} &= -g &\Rightarrow &\int_{v_{ay}(0)}^{v_{ay}} dv_y = -g \int_0^t dt \\ &&\Rightarrow &\boxed{v_{ay}(t) = 15 \sin \theta - gt}\end{aligned}$$

et on a v_{ax} qui est constant

$$v_{ax} = 15 \cos \theta$$

Au final

$$\boxed{\vec{v}_a = 15 \cos \theta \vec{i} + (15 \sin \theta - gt) \vec{j}}$$

Pour le ballon:

a $t = 0$:

$$\vec{v}_b(0) = -5\vec{i}$$

Maintenant calculant l'évolution de la vitesse du ballon au cours du temps.

PFD:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_b \quad \Rightarrow \quad -\vec{p} = m\vec{a}_b$$

Projection:

$$\begin{aligned}a_{by} &= -g \\ \frac{dv_{by}}{dt} &= -g &\Rightarrow &\int_0^{v_{by}} dv_{by} = -g \int_0^t dt \\ &&\Rightarrow &\boxed{v_{by}(t) = -gt}\end{aligned}$$

et on a v_{bx} qui est constant

$$v_{bx} = -5$$

Au final

$$\boxed{\vec{v}_b = -5\vec{i} - gt\vec{j}}$$

2. Les position de l'acrobate et du ballon

Pour l'acrobate:

$$\begin{aligned}\vec{v}_a &= \frac{d\vec{OA}}{dt} = 15 \cos \theta \vec{i} + (15 \sin \theta - gt) \vec{j} \\ \begin{cases} \frac{dx_a}{dt} = 15 \cos \theta \\ \frac{dy_a}{dt} = 15 \sin \theta - gt \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} dx_a = 15 \cos \theta dt \\ dy_a = (15 \sin \theta - gt) dt \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_a = 15t \cos \theta \\ y_a = 15t \sin \theta - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}\end{aligned}$$

Au final

$$\boxed{\vec{OA} = 15t \cos \theta \vec{i} + \left(15t \sin \theta - \frac{g}{2}t^2\right) \vec{j}}$$

Pour le ballon:

$$\begin{aligned}\vec{v}_b &= \frac{d\vec{OB}}{dt} = -5\vec{i} - gt\vec{j} \\ \begin{cases} \frac{dx_b}{dt} = -5 \\ \frac{dy_b}{dt} = -gt \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \int_{20}^{x_b} dx_b = -5dt \\ \int_h^{y_b} dy_b = -gt dt \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_b = 20 - 5t \\ y_b = h - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

Au final

$$\vec{OB} = (-5t + 20)\vec{i} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + h\right)\vec{j}$$

.

3. meme position horizontale

$$\Rightarrow x_a(t) = x_b(t)$$

$$15t \cos \theta = -5t + 20$$

$$t = \frac{20}{15 \cos \theta + 5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_m = 1.21s}$$

.

4. ils doivent etre à la meme hauteur et la meme position horizontale

$$\Rightarrow y_a(t_m) = y_b(t_m)$$

$$15t_m \sin \theta - \frac{g}{2}(t_m)^2 = h - \frac{g}{2}(t_m)^2$$

$$\boxed{h = 11.66m}$$

.

5. Vitesse du ballon relative a l'acrobate

$$\vec{r} = \vec{v}_b - \vec{v}_a$$

$$\vec{r} = -(15 \cos \theta + 5)\vec{i} - 15 \sin \theta \vec{j}$$

Sa norme

$$v_r = \sqrt{(5 + 15 \cos \theta)^2 + (15 \sin \theta)^2}$$

Au final

$$\boxed{v_r = 19.10m.s^{-1}}$$