

Exercice N° 1 1 coordonnées du centre de gravité

3.5 pts

Soit $G(x, y)$ le centre de gravité de (H) , avec :

$$x_G = \frac{\iint_{(H)} x dx dy}{\iint_{(H)} dx dy}, \quad y_G = \frac{\iint_{(H)} y dx dy}{\iint_{(H)} dx dy}.$$

• $\iint_{(H)} y dx dy = \iint_{(OCD)} y dx dy + \iint_{(ABCD)} y dx dy + \iint_{(ABE)} y dx dy$, avec $E(0, 3)$.
On a

0.25

• $\iint_{(OCD)} y dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_{-y^2}^{y^2} y dx \right] dy$ 0.5

$= \int_0^{\sqrt{2}} 2y^3 dy = 2.$ 0.25

• $\iint_{(ABCD)} y dx dy = \int_{-2}^2 \left[\int_{\sqrt{2}}^2 y dy \right] dx$ 0.5

$= \int_{-2}^2 dx = 4.$ 0.25

• $\iint_{(ABE)} y dx dy = \int_2^3 \left[\int_{2y-6}^{6-2y} y dx \right] dy$ 0.5

$= \int_2^3 (12y - 4y^2) dx = \frac{14}{3}.$ 0.25

• $\iint_{(OCD)} dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_{-y^2}^{y^2} dx \right] dy$

$= \int_0^{\sqrt{2}} 2y^2 dy = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$ 0.25

• $\iint_{(ABCD)} dx dy = \int_{-2}^2 \left[\int_{\sqrt{2}}^2 dy \right] dx$

$= \int_{-2}^2 (2 - \sqrt{2}) dx = 4(2 - \sqrt{2}).$ 0.25

• $\iint_{(ABE)} dx dy = \int_2^3 \left[\int_{2y-6}^{6-2y} dx \right] dy$

$= \int_2^3 (12 - 4y) dy = 2.$ 0.25

$$y_G = \frac{2 + 4 + \frac{14}{3}}{\frac{4\sqrt{2}}{3} + 4(2 - \sqrt{2}) + 2} = \frac{32}{30 - 8\sqrt{2}}$$

$x_G = 0$ (par symétrie)

0.25

2)

$$\bullet \iint_{(OCD)} \frac{e^y}{y^2} dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_{-y^2}^{y^2} \frac{e^y}{y^2} dx \right] dy \quad 1$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} 2e^y dy = 2e^{\sqrt{2}} - 2. \quad 0.5$$

3)

$$\bullet \iint_{D_1} (x+y) dx dy = \int_0^\pi \left[\int_1^2 r(r \cos \theta + r \sin \theta) dr \right] \theta \quad 1$$

$$= \int_0^\pi \frac{7}{3} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \frac{14}{3} \quad 0.5$$

$$\bullet \iiint_{D_2} z dx dy dz = \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} \left[\int_0^{2-x-z} z dy \right] dz \right] dx \quad 0.75$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} z(2-x-z) dz \right] dx \quad 0.25$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{-1}{6} x^3 + x^2 - 2x + \frac{4}{3} \right) dx \quad 0.25$$

$$= \frac{2}{3} \quad 0.25$$

Exercice N° 2.

$$(x, y, z) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow z = 4 \text{ et } x^2 + y^2 = 4. \quad 0.25$$

$S_1 \cap S_2$ désigne le cercle de centre $(0, 0, 4)$ de rayon 2

0.5

2)

$$\text{volume}(K) = \iiint_{(K)} dx dy dz. \quad 0.25$$

$$\text{volume}(K) = \iint_{(D)} \left[\int_{x^2+y^2}^4 dz \right] dx dy, \quad 0.75$$

où D désigne la projection de (K) sur le plan (oxy) .

0.25

(D) désigne le disque de centre $(0, 0)$ de rayon 2.

0.5

Le volume de (K) se ramène à l'intégrale double suivante :

$$\text{volume}(K) = \iint_{(D)} (4 - x^2 - y^2) dx dy. \quad 0.75$$

En posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$,

0.25 le volume de (K) devient :

$$\text{volume}(K) = \iint_{(D)} r(4 - r^2) dr d\theta. \quad 0.5$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (4r - r^3) dr \right] d\theta \quad 1$$

$$= \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 4\pi. \quad 1$$

Exercice N° 3.1) $\vdash \rightarrow \vdash \rightarrow \vdash \rightarrow$ (*vraie*)

0.25

On a

$$\forall x \geq 1 : \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

0.5

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est convergente ,

0.25

par comparaison, l'intégrale en question est convergente.

0.5

2) $\vdash \rightarrow \vdash \rightarrow \vdash \rightarrow$ (*vraie*)

0.25

On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

0.5

Comme $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann, $\alpha = 2 > 1$) ,

0.25

par comparaison, la série en question est convergente.

0.5

3) $\vdash \rightarrow \vdash \rightarrow \vdash \rightarrow$ (*vraie*)

0.25

la série de fonctions $\sum_1^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n$ possède la forme $\sum_1^{+\infty} a_n x^n$ (série entière),

$$\text{avec } a_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

0.25

Son rayon de convergence est $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$,

0.75

elle est convergente sur $] - R, R[=] - 1, 1[$.

0.5

4) $\vdash \rightarrow \vdash \rightarrow \vdash \rightarrow$ (*vraie*)

0.25

La série en question possède la forme $\sum_1^{+\infty} r^n$, avec $r = \frac{1}{4}x^2$ (série géométrique). Elleconverge si, et seulement si $\frac{1}{4}x^2 < 1$,

0.5

c'est à dire elle converge sur $] - 2, 2[$.

0.5