Corrigé de l'examen de mathématiques(I)

Corrigé de l'exercice1(07pts)

I. On a les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n} \end{cases} \qquad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$$

1. Calcul de u_1 et u_2 (01pts)

■ $u_1 = \frac{2u_0}{2+3u_0} = \frac{2\times 1}{2+3\times 1} = \frac{2}{5}.$ (0.5pts)

■ $u_2 = \frac{2u_1}{2+3u_1} = \frac{2\times\frac{2}{5}}{2+3\times\frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{2+\frac{6}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2\times 5+6}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{5\times 4}{5\times 16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$ (0.5pts)

---

2. Déduction que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique ni géométrique(01pts)

Rappelons que si pour une valeur quelconque de n, disons $n = \alpha$, telle que :

■ $u_{\alpha+1} - u_\alpha \neq u_{\alpha+2} - u_{\alpha+1}$, ***alors*** (u_n) *n'est pas arithmétique.*

■ $\frac{u_{\alpha+1}}{u_\alpha} \neq \frac{u_{\alpha+2}}{u_{\alpha+1}}$, ***alors*** (u_n) *n'est pas géométrique.*

On a : $\begin{cases} u_1 - u_0 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5} \\ u_2 - u_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20} \end{cases} \Longrightarrow u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1.$

Donc, (u_n) n'est pas arithmétique. (0.5pts)

De même : $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{2}{5}}{1} = \frac{2}{5} \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{8} \end{cases} \Longrightarrow \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}.$

Donc, (u_n) n'est pas géométrique. (0.5pts)

---

3. Montrons que (v_n) est arithmétique (01.5pts)

On a : $v_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_{n+1}} = 1 + \frac{2}{\frac{2u_n}{2+3u_n}} = 1 + \frac{2(2+3u_n)}{2u_n} = 1 + \frac{2+3u_n}{u_n} = 1 + \frac{2}{u_n} + \frac{3u_n}{u_n} = 1 + \frac{2}{u_n} + 3.$

Ainsi, $v_{n+1} = v_n + 3$. D'où (v_n) est arithmétique. (01pts)

Sa raison $r = 3$ et son premier terme $v_0 = 3$. (0.5pts)

---

4. L'expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n(01.5pts)

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant arithmétique alors :

$v_n = v_0 + n\times r = 3 + 3n = 3(n+1).$ (0.5pts)

Aussi, on a : $v_n = 1 + \frac{2}{u_n} \Longrightarrow v_n - 1 = \frac{2}{u_n} \Longrightarrow (v_n - 1)u_n = 2 \Longrightarrow u_n = \frac{2}{v_n - 1}.$

Et par conséquent : $u_n = \frac{2}{3(n+1)-1} = \frac{2}{3n+2}.$ (01pts)

---

5. Calcul de v_{20} et u_{10} (0.5pts)

■$v_{20} = 3(20+1) = 3\times 21 = 63$ ■$u_{10} = \frac{2}{3\times 10+2} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}.$

Corrigé de l'examen de mathématiques(I)

II. Calcul de la limite de (u_n) (01.5pts) :

■ $\lim u_n = \lim \frac{-3(n-2)^2}{2n^2+n+1} = \lim \frac{-3n^2+12n-12}{2n^2+n+1} = \lim \frac{-3n^2}{2n^2} = -\frac{3}{2}$. (0.5pts)

■ $\lim u_n = \lim \frac{2^n+3^n-4^n}{2^{2n+1}} = \lim \frac{2^n+3^n-4^n}{2^{2n}\times 2} = \lim \frac{2^n+3^n-4^n}{(2^2)^n\times 2} = \lim \frac{2^n+3^n-4^n}{4^n\times 2} = \lim \frac{2^n+3^n-4^n}{4^n}\times\frac{1}{2}$

$= \lim(\frac{2^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}-\frac{4^n}{4^n})\times\frac{1}{2} = \lim\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right)\times\frac{1}{2} = (0+0-1)\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. (01pts)

Fin du corrigé de l'exercice1

Corrigé de l'exercice2(05pts)

I. Résolution de l'inéquation avec la fonction exponentielle (03pts):

$$-3e^{2x}-4e^x+4\leq 0 \qquad (*)$$

Il est clair que le domaine de définition de l'inéquation $(*)$ est $\mathcal{D}_{inq} =]-\infty,+\infty[$.

En posant $X=e^x$, on a $X\in]0,+\infty[$ et l'inéquation $(*)$ peut s'écrire sous la forme :

$-3X^2-4X+4\leq 0. \qquad (**)$ (0.5pts)

La résolution de l'inéquation $(**)$ nous amène à étudier le signe de : $P(X)=-3X^2-4X+4$.

On a : $P(X)=0$, nous donne l'équation $-3X^2-4X+4=0$.

Son $\Delta = 64 > 0$. Il existe donc deux solutions :

$X_1=\frac{4-8}{-6}=\frac{2}{3}\in]0,+\infty[$ et $X_2=\frac{4+8}{-6}=-2\notin]0,+\infty[$. (0.5pts)

Et on a le tableau suivant : (0.5pts)

X	0	$2/3$	$+\infty$
$signe\ de\ P(X)$	$+$	0	$-$

Du tableau, on déduit les solutions de l'inéquation $(**)$ sont :

$S^{**}=\left[\frac{2}{3},+\infty\right[$. (0.5pts)

Et par conséquent, les solution S^* de l'inéquation $(*)$ sont les x telle que :

$e^x\in S^{**}=\left[\frac{2}{3},+\infty\right[\Leftrightarrow x\in\left[\ln\frac{2}{3},+\infty\right[$.

Par conséquent : $S^*=\left[\ln\frac{2}{3},+\infty\right[$. (01pts)

II. Résolution de l'équation avec la fonction logarithme(02pts):

$$\ln(x-2)+\ln(x+1)=0 \qquad (*)$$

L'équation $(*)$ est définie si et seulement si : $\begin{cases}x-2>0\\x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>2\\x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in]2,+\infty[\\x\in]-1,+\infty[\end{cases}$

Donc, le domaine de définition de l'équation $(*)$ est :

$\mathcal{D}_{eq} =]2,+\infty[\,\cap\,]-1,+\infty[=]2,+\infty[$. (0.5pts)

De plus, on peut écrire l'équation $(*)$ sous la forme :

$\ln(x-2)(x+1)=\ln 1 \Leftrightarrow \ln(x^2-x-2)=\ln 1 \Leftrightarrow x^2-x-2=1$.

Et on obtient cette nouvelle équation :

$x^2-x-3=0. \qquad (**)$

Son $\Delta = 13 > 0$. Il existe deux solutions : $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \notin \mathcal{D}_{eq}, x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \in \mathcal{D}_{eq}$. (0.5pts)

Et par conséquent, l'équation $(*)$ admet une solution : $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. (01pts)

Fin du corrigé de l'exercice2

Corrigé de l'exercice3(08pts)

I. La recherche des extremums de f en utilisant le teste de la 1ère dérivée où : (05pts)

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2-1}$$

Le domaine de Définition $\mathcal{D}_f$

On a : $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Donc, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. (01pts)

La dérivée

$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2-1)-2xe^{-x}}{(x^2-1)^2} = \frac{(-(x^2-1)-2x)e^{-x}}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2-1)^2}e^{-x}$. (01pts)

Les points critiques

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-2x+1}{(x^2-1)^2}e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 1 = 0$.

Le $\Delta = 8 > 0$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Les deux solutions sont :

$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2}, x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$.

Ainsi, f admet deux points critiques : $x_1 = -1 + \sqrt{2}, x_2 = -1 - \sqrt{2}$. (01pts)

Le test

Le test des points critiques par la 1ère dérivée se fait avec ce tableau de variations : (01pts)

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1	$+\infty$
signe de f'	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$

Du tableau, on déduit que f admet deux extremums :

- $f(-1-\sqrt{2}) = \frac{e^{1+\sqrt{2}}}{2(1+\sqrt{2})}$. Un minimum local. (0.5pts)
- $f(-1+\sqrt{2}) = \frac{e^{1-\sqrt{2}}}{2(1-\sqrt{2})}$. Un maximum local. (0.5pts)

II. Calcul de la dérivée(03pts) :

- $f(x) = \frac{-5}{(x^5+2x-5)^{\frac{1}{5}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5\times\left(-\frac{1}{5}\right)(5x^4+2)}{(x^5+2x-5)^{\frac{6}{5}}} = \frac{5x^4+2}{(x^5+2x-5)^{\frac{6}{5}}}$. (01.5pts)
- $f(x) = e^{\sqrt{4x-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}e^{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}e^{\sqrt{4x-x^2}}$. (01.5pts)

Fin du corrigé de l'exercice3 et du sujet