

✠–Examen Final de Mathématiques 3–✠

Exercice 1 (09.00 Points) :

1. Calculer l'intégrale simple I_1 :

$$I_1 = \int_1^2 x^3 e^{-x^2} dx,$$

et en déduire la nature de l'intégrale impropre suivante :

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x} e^{-x^2} dx.$$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t},$$

et déduire la nature de l'intégrale :

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

3. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n! e^{-n}}{n^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 2 (11.00 Points) :

I. Soient $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq y \leq 2 \text{ et } y \leq x \leq y^2\}$.

- Tracer le domaine D_1 .
- Calculer l'intégrale double suivante :

$$J_1 = \int \int_{D_1} x^2 dx dy.$$

II. Soit $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\}$.

1. Tracer le domaine D_2 .
2. Calculer l'intégrale double suivante :

$$J_2 = \int \int_{D_2} dx dy. \quad \text{Interpréter le résultat obtenu.}$$

III. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

1. Calculer les intégrales triples suivantes :

$$J_3 = \int \int \int_V x y dx dy dz, \quad \text{et} \quad J_4 = \int \int \int_V z \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy dz.$$

Une rédaction précise, claire et rigoureuse est requise.

EXO 1 =

I)

$$1. I_1 = \int_1^2 x^3 e^{-x^2} dx = \int_1^2 x^2 \cdot x e^{-x^2} dx$$

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x \\ v(x) = x e^{-x^2} \Rightarrow v'(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \end{cases}$$

$$I_1 = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} \right]_1^2 + \int_1^2 x e^{-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_1^2 \\ &= \left[-\frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2} \right]_1^2 = -\frac{5}{2} e^{-4} + e^{-1} \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x} e^{-x^2} dx \quad (ps = +\infty)$$

La fct $x \mapsto \frac{x^4 + 1}{x} e^{-x^2}$ continue et positive sur $[1, +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + 1}{x} &\sim_{+\infty} x^3 \\ \text{dnc } \frac{x^4 + 1}{x} e^{-x^2} &\sim_{+\infty} x^3 e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x t^3 e^{-t^2} dt$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} (t^2 + 1) e^{-t^2} \right]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2} + e^{-1} = e^{-1} \text{ (cv)} \end{aligned}$$

Alors d'après le critère d'équivalence
 $\int_1^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x} e^{-x^2} dx$ cv

$$2. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1.$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \quad (ps = +\infty)$$

0.5/ La fct $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ continue et positive sur $[1; +\infty[$.

et d'après la limite précédente

$$0.5/ \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim_0 \frac{1}{x^2} \quad \left(t = \frac{1}{x^2}\right)$$

$$0.5/ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad cv \quad (\text{Riemann pour } d=2)$$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$

0.5/ Alors d'après le critère d'équivalence I_3 cv

$$3. \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! e^n}{n^n} \quad (\text{critère d'Alambert}),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n! e^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! (n+1) e^n \cdot e \times n^n}{(n+1) (n+1)^n \cdot n! e^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times e^{-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \times e^{-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} e^{-1} = e^{-1} < 1$$

0.5/ Alors d'après le critère d'Alambert $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! e^n}{n^n} c$

~~01/10~~ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$

01/10

Alors d'après la condition

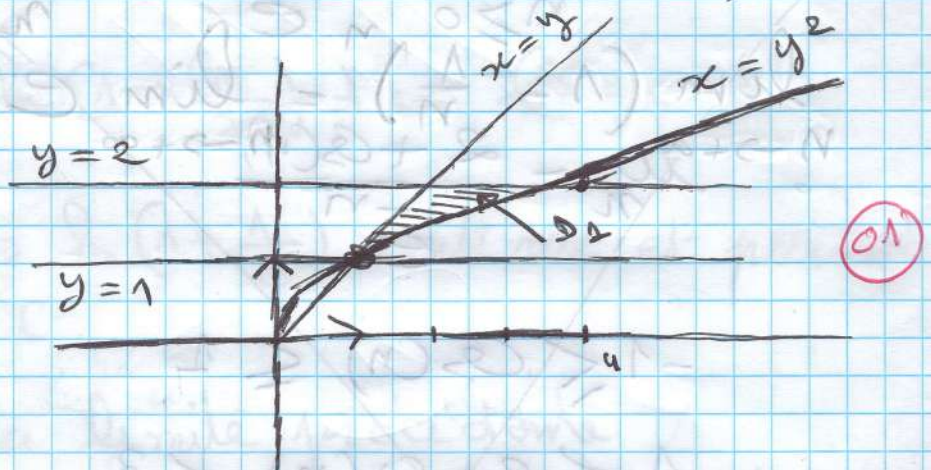
nécessaire de convergence (CNC)

la série $\sum_{n \geq 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

EX02

I. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq y \leq 2 \text{ et } y \leq x \leq y^2\}$

• tracer D_1



• $J_1 = \iint_{D_1} x^2 dx dy$

0,25 $= \int_1^2 \left[\int_y^{y^2} x^2 dx \right] dy$

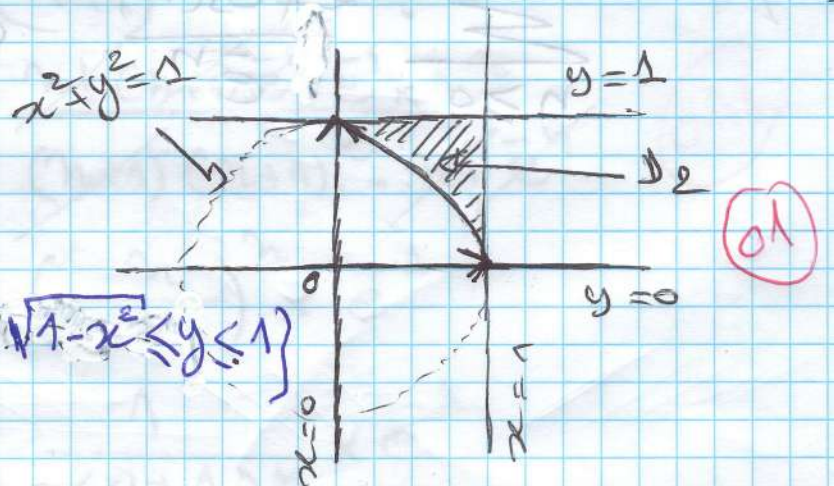
0,5 $= \int_1^2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_y^{y^2} dy = \frac{1}{3} \int_1^2 (y^6 - y^3) dy$ (02)

$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{7} y^7 - \frac{1}{4} y^4 \right]_1^2 = \frac{403}{84}$ 0,25

II.

$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\}$

• tracer D_2



$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1\}$

• $J_2 = \iint_{D_2} dx dy$

$= \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy \right] dx$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{[y]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) dx$$

$$= \int_0^1 1 \cdot dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\int_0^1 1 \cdot dx = [x]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{voir série TD n°01, I4}).$$

On pose $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

$$x=0 \Rightarrow t=0; \quad x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t)) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Donc $J_2 = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$

Interpretation

$$\text{Aire}(D_2) = \frac{4-\pi}{4} \text{ u.a}$$

(5)

$$\text{III)} \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$I_3 = \iiint_V xy \, dx \, dy \, dz$$

on utilise les coordonnées sphériques.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad |J| = r^2 \cos \varphi$$

$$\Delta_3 = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$I_3 = \iiint_{\Delta_3} r \cos \theta \cos \varphi \cdot r \sin \theta \cos \varphi \cdot r^2 \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^4 \, dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^1 \times \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi - \cos \varphi \sin^2 \varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{10} \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{10} \left[\frac{2}{3} \right] = \frac{1}{15}$$

$$J_4 = \iiint_V z \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \, dz$$

on utilise les coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = r$$

(2)

$$\Delta_4 = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\}$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z \cdot \sqrt{1-r^2} \, r \, dz \right) dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} \cdot \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{1-r^2}} dr \times \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 r \cdot \sqrt{1-r^2} \cdot (1-r^2) \, dr \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 r (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \, dr \\ &= -\frac{\pi}{8} \int_0^1 -2r (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \, dr \\ &= -\frac{\pi}{8} \left[\frac{2}{5} (1-r^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{20} \end{aligned}$$

(7)