

ALGÈBRE II - TD N° 1 (LES ESPACES VECTORIELS)

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On considère les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$\begin{cases} \forall (x, y), (x', y') \in E : (x, y) \oplus (x', y') = (xx', y + y') \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E : \lambda \otimes (x, y) = (x^\lambda, \lambda y). \end{cases}$$

Montrer que $(E, \oplus, \otimes)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Les ensembles suivants sont ils des sous espaces de $\mathbb{R}^3$?

- (1) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y, z = 0\}$
- (2) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$
- (3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$
- (4) $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 2\}$.

Exercice 3. Soient G_1 et G_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\} \quad , \quad G_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = G_1 \oplus G_2$ (C'est-à-dire que $\mathbb{R}^3$ est somme directe de G_1 et G_2).

Exercice 4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants :

$$v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 0) \text{ et } v_4 = (1, 1, 1)$$
$$u_1 = (1, -3, 2), u_2 = (2, -4, -1), u_3 = (1, -5, 7) \text{ et } u_4 = (2, -5, 3)$$

- (1) Ecrire le vecteur v_4 comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3 .
- (2) Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.
- (3) Peut-on écrire u_4 comme combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 ?
- (4) Est-ce que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre ?

Exercice 5. On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble F donné par :

$$F = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

- (1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Déterminer une base de F , puis donner sa dimension.
- (3) Est-ce que $F = \mathbb{R}^3$?

(Exercices supplémentaires)

Exercice 6. On considère dans l'espace $\mathbb{R}^4$, la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

(où $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$)

Les familles suivantes sont-elles libres ?

(1) $\{e_1, 2e_2, e_3\}$

(2) $\{e_1, 2e_2 + e_4, e_4\}$.

(3) $\{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\}$

(4) $\{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}$.

Exercice 7. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (1, -1, -2)$, $v_3 = (3, 7, 0)$ et $v_4 = (5, 0, -7)$ et soient $E = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $F = \text{Vect}(v_3, v_4)$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $E = F$.

Exercice 8. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on considère le sous-ensemble E défini par :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

et soient les vecteurs $a = (1, -2, 3)$, $b = (2, 1, -1)$ et $F = \text{Vect}(a, b)$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer $E \cap F$.

(3) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?