

Série de TD n° 01 : Intégrales et calcul des primitives

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \cos x e^{\sin x} dx$ 2. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

3. $\int e^x (1 + e^x)^4 dx$ 4. $\int \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} dx.$

Exercice 2. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties :

1. $\int (2x + 1)e^x dx.$

2. $\int x \sin x dx.$

3. $\int x \arctan x dx.$

Exercice 3. En effectuant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx.$

2. $\int \cos x e^{\sin x} dx.$

3. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx .$

Exercice 4. Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

1. $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx.$

2. $\int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} dx.$

3. $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10} dx.$

Exercice 5. Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \sin^3(x) dx.$

2. $\int \cos^5 x \sin^2 x dx.$

3. $\int (\sin 3x)(\cos 4x) dx.$

corrigé

Exercice 1. 1. $\int \cos x e^{\sin x} dx$

$$\int \cos x e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int f'(x) e^{f(x)} = e^{f(x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{x^2 + 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{f(x)} + C.$

3. $\int e^x (1 + e^x)^4 dx$

$$\int e^x (1 + e^x)^4 dx = \frac{(1 + e^x)^5}{5} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int f'(x) f^\alpha(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha + 1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

4. $\int \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} dx$

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{-1}{(x^2 + 2)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(x)} + C.$

Exercice 2.

1. $\int (2x + 1) e^x dx$

On intègre par parties, en posant

$$\begin{cases} u(x) = (2x + 1) \\ v'(x) = e^x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int (2x + 1) e^x dx &= (2x + 1) e^x - 2 \int e^x dx \\ &= (2x + 1) e^x - 2e^x + C = (2x - 1) e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $\int x \sin x dx$

On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$$

On obtient, donc

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. $\int x \arctan x dx$

On intègre par parties, en posant

$$\begin{cases} u(x) = \arctan x \\ v'(x) = x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

et on trouve :

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$.

En posant : $t = e^x \implies dt = e^x dx$, D'où

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. $\int \cos x e^{\sin x} dx$.

En posant : $t = \sin x \implies dt = \cos x dx$, D'où

$$\int \cos x e^{\sin x} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

En posant : $t^2 = x - 1 \implies 2t dt = dx$, et $x = t^2 + 1$. D'où

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= 2 \int \frac{t}{t^2 + 1} (t dt) = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} = 2t - 2 \arctan t + C \\ &= 2\sqrt{x-1} - 2 \arctan \sqrt{x-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 4.

$$1. \int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx.$$

Tout d'abord on factorise le dénominateur $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$, puis on décompose la fonction $\frac{x+3}{x^2-3x+2}$ en éléments simples

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{(A+B)x - A - 2B}{(x-2)(x+2)}$$

où A, B sont deux constantes réelles qu'on va déterminer.

Par identification on a :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A-2B=3 \end{cases}$$

En résolvant ce système, nous trouvons $A=5$ et $B=-4$.

donc

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{5}{(x-2)} - \frac{4}{(x-1)}$$

d'où

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} = \int \frac{5}{(x-2)} dx - \int \frac{4}{(x-1)} dx = 5 \ln|x-2| - 4 \ln|x-1| + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

$$2. \int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} dx.$$

1-ère étape : Effectuer la division euclidienne

$$\frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} = x+2 + \frac{x-5}{x^2+2x+1}$$

2-ème étape : Décomposer $\frac{x-5}{x^2+2x+1}$ en éléments simples

$$\frac{x-5}{x^2+2x+1} = \frac{x-5}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+(A+B)}{(x+1)^2}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} A=1 \\ A+B=-5 \implies B=-6, \end{cases}$$

donc

$$\frac{x-5}{x^2+2x+1} = \frac{x-5}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{-6}{(x+1)^2}$$

Ainsi,

$$\frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} = x+2 + \frac{1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2}$$

3-ème étape : Intégrer :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} dx &= \int \left(x+2 + \frac{1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \int (x+2) dx + \int \frac{1}{x+1} dx - 6 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10} dx$.

On a

$$x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$$

En posant : $x-1 = 3t \implies dx = 3dt$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{x^2-2x+10} dx &= \int \frac{3(3t+1)+1}{9(t^2+1)} 3dt = \int \frac{27t+12}{9(t^2+1)} dt \\ &= 3 \int \frac{t}{t^2+1} dt + \frac{4}{3} \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \frac{3}{2} \ln(t^2+1) + \frac{4}{3} \arctan(t) + C \\ &= \frac{3}{2} \ln \left(\left(\frac{x-1}{3} \right)^2 + 1 \right) + \frac{4}{3} \arctan \left(\frac{x-1}{3} \right) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

1. $\int \sin^3 x dx$

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx \\ &= -\cos x - \int \cos^2 x \sin x dx \end{aligned}$$

Calculons $\int \cos^2 x \sin x dx$

On pose $t = \cos x \implies dt = -\sin x dx$.

Donc

$$\int \cos^2 \sin x dx = - \int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

d'où

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2. $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$

$$\int \cos^5 x \sin^2 x dx = \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x \cos x dx$$

On pose $t = \sin x \implies dt = \cos x dx$. Donc

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sin^2 x dx &= \int (1 - t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = \frac{1}{7} t^7 - \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + C = \\ &= \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{3} \sin^3 x + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. $\int (\sin 3x)(\cos 4x) dx$

$$\begin{aligned} \int (\sin 3x)(\cos 4x) dx &= \int \frac{1}{2} (\sin(3+4)x + \sin(3-4)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin(7x) dx + \sin(-x)) dx = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos(-x) + C \\ &= -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos(x) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$