

Série d'application n° 01 : Intégrales et calcul des primitives

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \left(x^2 + 3 \sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx$
2. $\int \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x + 4} dx$
3. $\int \cos(2x + 1) dx$
4. $\int (2x - 2)(x^2 - 2x + 1)^2 dx.$

Exercice 2. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties :

1. $\int x^n \ln x dx$, où $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$.
2. $\int e^x \cos x dx.$
3. $\int \arctan x dx.$

Exercice 3. En effectuant le changement de variable indique, calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ en posant $t = \sqrt{x}$.
2. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ en posant $t = \cos x$.
3. $\int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}$ en posant $t = e^x$.

Exercice 4. Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

1. $\int \frac{x}{x^2 - 4} dx.$
2. $\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 3x + 2} dx.$
3. $\int \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 5} dx.$

Exercice 5. posons :

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

1. Calculer $I_1 + I_2$ et $I_1 - I_2$. Puis déduire la valeur de I_1 et I_2 .
2. Calculer les intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 1} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + 1} dx.$$

Corrigé

Exercice 1.

1. $\int \left(x^2 + 3 \sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx$

On a :

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 + 3 \sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx &= \int x^2 dx + 3 \int \sin x dx + \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} - 3 \cos x + \sqrt{x} + \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x + 4} dx$

On a :

$$\int \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x + 4} dx = \int \frac{2(3x^2 + 2)}{x^3 + 2x + 4} dx = 2 \int \frac{(3x^2 + 2)}{x^3 + 2x + 4} dx = 2 \ln|x^3 + 2x + 4| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$

3. $\int \cos(2x + 1) dx$

$$\int \cos(2x + 1) dx = \frac{1}{2} \sin(2x + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. $\int (2x - 2)(x^2 - 2x + 1)^2 dx.$

$$\int (2x - 2)(x^2 - 2x + 1)^2 dx = \frac{(x^2 - 2x + 1)^{2+1}}{2 + 1} + C = \frac{(x^2 - 2x + 1)^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int f'(x) f^\alpha(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha + 1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Exercice 2.

1. $\int x^n \ln x dx$

On intègre par parties, en posant

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $\int e^x \cos x dx$

On va intégrer par parties deux fois. On pose alors :

$$\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = \cos x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin x \end{cases}$$

On obtient, donc

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \underbrace{\int \sin x e^x dx}_J$$

On intègre une deuxième fois par parties en posant

$$\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$$

de sorte que

$$J = \int \sin x e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

alors

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \implies \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

3. $\int \arctan x dx$

On intègre par parties, en posant

$$\begin{cases} u(x) = \arctan x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$$

et on trouve :

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Posons $t = \sqrt{x} \implies x = t^2$ alors, on obtient $dx = 2t dt$

$$\text{Pour } \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

On a donc

$$\int_1^2 \frac{1-t}{t} 2t dt = 2 \int_1^2 (1-t) dt = 2 \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_1^2 = -1.$$

$$2. \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Posons $t = \cos x \implies dt = -\sin x dx$, de sorte que pour

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \implies \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_1^{-1} -\frac{dt}{(1+t^2)} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$3. \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}.$$

Posons $t = e^x \implies dt = e^x dx$, de sorte que pour

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} t = 1 \\ t = e. \end{cases}$$

Il vient

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} = \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)}$$

On calcule cette intégrale en réalisant une décomposition en élément simples. Plus précisément, on remarque que

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}.$$

Ainsi,

$$\int_1^e \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^e \frac{1}{t} dt - \int_1^e \frac{1}{1+t} dt = [\ln t - \ln(t+1)]_1^e = 1 - \ln(e+1) + \ln(2).$$

Exercice 4.

$$1. \int \frac{x}{x^2 - 4} dx$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$2. \int \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

1-ère étape : Effectuer la division euclidienne

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 3x + 2} = 1 + \frac{5x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

2-ème étape : Décomposer $\frac{5x+3}{x^2-3x+2}$ en éléments simples

$$\frac{5x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{5x + 3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)},$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -2A - B = 3, \end{cases}$$

En résolvant ce système, nous trouvons

$$\begin{cases} a = -8 \\ b = 13, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{-8}{(x-1)} + \frac{13}{(x-2)},$$

Ainsi,

$$\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} = 1 - \frac{8}{(x-1)} + \frac{13}{(x-2)},$$

3-ème étape : Intégrer :

$$\int \frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} dx = \int \left(1 - \frac{8}{(x-1)} + \frac{13}{(x-2)} \right) dx = x - 8 \ln |x-1| + 13 \ln |x-2| + C.$$

$C \in \mathbb{R}$.

3. $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx$
On a

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$$

En posant : $x+1 = 2t \implies dx = 2dt$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{x^2+2x+5} &= \int \frac{2t+3}{4(t^2+1)} 2dt = \int \frac{4t}{4(t^2+1)} dt + \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + \frac{3}{2} \arctan(t) + C, \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

1. Soient

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

En calculant la somme et la différence, on trouve

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C_1. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \\
&= \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\
&= -\ln(|\sin x + \cos x|) + C_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

de (1) + (2), on a

$$2I_1 = x - \ln(|\sin x + \cos x|) + C_3, \text{ avec } C_3 = C_1 + C_2$$

d'où

$$I_1 = \frac{1}{2}(x - \ln(|\sin x + \cos x|)) + C, \text{ avec } C = \frac{C_3}{2}.$$

de (1) - (2), on a

$$2I_2 = x + \ln(|\sin x + \cos x|) + C_4, \text{ avec } C_4 = C_1 - C_2$$

d'où

$$I_2 = \frac{1}{2}(x + \ln(|\sin x + \cos x|)) + C', \text{ avec } C' = \frac{C_4}{2}.$$

2. Le changement de variable : $t = \tan \frac{x}{2} \implies dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 1} dx = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} = \int_0^1 \frac{2dt}{1+2t+t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} \Big|_0^1 = -1 - (-2) = 1.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 1 - 1}{\sin x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 1} dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$