

Chapitre 5

Intégrales simples

5.1 Introduction

Ce chapitre donne une introduction à l'intégrale de Riemann et de quelques propriétés fondamentales qui sont conséquence des définitions. Ensuite, on établit le lien entre cette intégrale et les primitives. Une partie du cours est consacrée à exposer les principales techniques de calcul des primitives et des intégrales.

Dans ce qui suit, on considère que des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

5.2 Intégrale de Riemann

Définition 5.1 (*Subdivision*)

Une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est une partie finie fermée de $(n + 1)$ éléments $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ de $[a, b]$ telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

On appelle "pas" de la subdivision le réel $\max_{0 \leq i \leq n-1} (a_{i+1} - a_i)$.

Définition 5.2 Une somme de Riemann d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles relativement à une subdivision $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ de $[a, b]$ est le réel défini par :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(x_i), \quad \text{où } x_i \in [a_i, a_{i+1}].$$

Remarque. Lorsque : $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$ pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on parle de la subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$, le nombre $\frac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.

Théorème 5.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue.

Les sommes de Riemann relatives à la fonction f convergent toutes vers la même limite lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, on note cette limite : $\int_a^b f(x) dx$ et on dit que f est Riemann-intégrable.

Remarque. La variable d'intégration x est une variable muette, c'est à dire qu'elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable (qui n'intervient pas déjà ailleurs)

Proposition 5.1 Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, $c \in [a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

- 1) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$, 2) $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$,
- 3) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, 4) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$, 5) $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- 6) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (la règle de Chasles).
- 7) Si $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = 0$
- 8) Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- 8) Si $n \leq f(x) \leq m, \forall x \in [a, b]$ ($n, m \in \mathbb{R}$) alors, $n(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq m(b-a)$.
- 9) Si $n \leq f(x) \leq m$ et $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ ($n, m \in \mathbb{R}$), alors
 $n \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq m \int_a^b g(x) dx$.

Proposition 5.2 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Alors on a :

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right).$$

Théorème 5.2 (Théorème de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

5.3 Les primitives

Définition 5.3 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On appelle "primitive" de f sur I toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que : $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Une primitive d'une fonction f , représentée par $\int f(x) dx$ s'appelle aussi une intégrale indéfinie de f et l'ensemble de toutes les primitives de f s'écrit $\int f(x) dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.3 La fonction : $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 2x$ est une primitive de la fonction : $x \mapsto 3x^2 - 8x + 2$ sur $\mathbb{R}$ et toutes les primitives de la fonction : $x \mapsto 3x^2 - 8x + 2$ sur $\mathbb{R}$ sont $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

On écrit :

$$\int (3x^2 - 8x + 2) dx = x^3 - 4x^2 + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Une primitive de la fonction : $x \mapsto \cos 2x$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \sin 2x$ sur $\mathbb{R}$ et toutes les primitives de la fonction : $x \mapsto \cos 2x$ sur $\mathbb{R}$ sont

$$\int (\cos 2x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 5.1 Les primitives d'une fonction sont pas unique.

Exemple 5.4 Soit la fonction $f(x) = 4x + 3$.

On a :

$$F(x) = 2x^2 + 3x, \quad G(x) = 2x^2 + 3x + 1, \quad H(x) = 2x^2 + 3x + 2, \quad \dots$$

sont des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Conclusion 5.5 Si on connaît une primitive F de f , toutes les autres primitives de f sont de la forme $F + c$ où c est une constante.

Propriétés fondamentales :

Soient F et G des primitives respectivement de f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

$$1) \int (f + g)(x) dx = F(x) + G(x), \quad \forall x \in I. \quad 2) \int (\lambda f)(x) dx = \lambda F(x), \quad \forall x \in I.$$

$$3) \int (fG + Fg)(x) dx = (F \cdot G)(x), \quad \forall x \in I.$$

$$4) \int \left(\frac{fG - Fg}{G^2} \right)(x) dx = \left(\frac{F}{G} \right)(x), \quad \forall x \in I, \quad (\text{avec } G(x) \neq 0, \quad \forall x \in I).$$

Primitives des fonctions usuelles :

$$1) \int \lambda dx = \lambda x + c, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad 4) \int \sin(ax + b) dx = \frac{-1}{a} \cos(ax + b) + c, \quad a \neq 0.$$

$$2) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c. \quad 5) \int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c, \quad a \neq 0.$$

$$3) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}. \quad 6) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \quad |x| < 1,$$

où c est une constante dans $\mathbb{R}$.

5.4 Intégrale définie

Proposition 5.3 *Si F est une primitive de la fonction continue f sur $[a, b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette proposition montre toute l'importance que représente la connaissance des primitives des fonctions continues dans le calcul des intégrales.

Remarque 5.2 *Il y a une différence entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie d'une fonction (il ne faut pas confondre les deux).*

** $\int f(x) dx$ s'appelle une intégrale indéfinie de f , c'est une fonction primitive de f .*

** $\int_a^b f(x) dx$ s'appelle une intégrale définie de f , c'est un nombre réel.*

Remarque 5.3

$$\int_a^b f'(x) dx = \left[f(t) \right]_a^b = f(b) - f(a).$$

Exemple 5.6

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

5.5 Techniques de calcul des primitives

5.5.1 Intégration par parties

La première méthode de calcul des primitives est donnée par la formule dite "intégration par parties". Elle est basée sur la formule de dérivation d'un produit.

Proposition 5.4 *Soient $U, V : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors*

$$\int U(x) V'(x) dx = U(x) V(x) - \int U'(x) V(x) dx.$$

Preuve. On a :

$$(U(x) V(x))' = U'(x) V(x) + U(x) V'(x),$$

donc,

$$\int U(x) V'(x) dx = \int (U(x) V(x))' dx - \int U'(x) V(x) dx.$$

D'où

$$\int U(x) V'(x) dx = U(x) V(x) - \int U'(x) V(x) dx.$$

■

Exemple 5.7 Calculer $\int x e^x dx$.

Posons :

$$\begin{cases} U(x) = x, \\ V'(x) = e^x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1, \\ V(x) = e^x. \end{cases}$$

Donc

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 e^x dx = (x - 1) e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 5.4 La méthode de l'intégration par parties s'emploie fréquemment dans le calcul des intégrales de la forme $\int x^k (\sin x) dx$, $\int x^k (\cos x) dx$, $\int x^k e^{\alpha x} dx$, $\int x^k (\ln x) dx$.

5.5.2 Intégration par changement de variable

Voici une seconde méthode de calcul de primitives. Elle s'appuie sur la formule de dérivation d'une fonction composée.

Formules de changement de variable :

Si le calcul de $\int f(x) dx$ s'avère difficile, on remplace x par $g(t)$ où g est dérivable, donc $dx = g'(t) dt$ et on aura :

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt.$$

Remarque 5.5 Le succès de l'intégration dépend de notre habilité à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs.

Un changement de variable comporte trois étapes :

- 1- Choisir la fonction $g(t)$ (c'est la seule partie où il faut faire preuve d'imagination et d'expérience).
- 2- Ecrire $dx = g'(t) dt$ pour préparer le changement de variable.
- 3- Appliquer la formule du changement de variable (ne pas oublier de changer les bornes quand il s'agit d'une intégrale définie).

Exemple 5.8 Calculer $\int \frac{1}{(x-1)^5} dx$.

On pose : $t = x - 1$, donc $dt = dx$.

Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)^5} dx &= \int \frac{1}{t^5} dt = \int t^{-5} dt = \frac{-1}{4} t^{-4} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{-1}{4(x-1)^4} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 5.9 Calculer $\int \sin^3 x \cos x dx$.

On pose : $t = \cos x$, donc $dt = -(\sin x) dx$, d'où $dx = \frac{-1}{\sin x} dt$.

Alors

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos x dx &= \int (\sin^2 x) t \frac{-1}{\sin x} dt = - \int (\sin x) t dt \\ &= - \int (1 - \cos^2 x) t dt = - \int (1 - t^2) t dt \\ &= -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} t^4 + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.6 Compléments sur le calcul des primitives

1- Intégration des fractions rationnelles :

Une intégrale d'une fonction rationnelle peut toujours, à l'aide de la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples, se ramener à une combinaison linéaire d'intégrales de la forme

$$\int \frac{1}{(x+\lambda)^n} dx, \int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx \quad \text{où } a, b, p, q, \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

Donc il suffit de connaître les valeurs des intégrales de ces types pour en déduire celles des intégrales de fonctions rationnelles.

a) Intégrale du type : $\int P(x) dx$.

Dans le cas où P est un polynôme, on intègre terme à terme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

alors

$$\begin{aligned}
 \int P(x) dx &= \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx \\
 &= \int a_n x^n dx + \int a_{n-1} x^{n-1} dx + \dots + \int a_1 x dx + \int a_0 dx \\
 &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

b) Intégrale du type : $\int \frac{1}{x+\lambda} dx, \lambda \in \mathbb{R}.$

$$\int \frac{1}{x+\lambda} dx = \ln |x+\lambda| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

c) Intégrale du type : $\int \frac{1}{(x+\lambda)^n} dx$ et $n > 1$.

$$\int \frac{1}{(x+\lambda)^n} dx = \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x+\lambda)^{n-1}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

d) Intégrale du type : $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$ où a, b, p et $q \in \mathbb{R}.$

Si x^2+px+q possède deux racines réelles α et β , donc :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{A}{x-\alpha} dx + \int \frac{B}{x-\beta} dx \\
 &= A \ln |x-\alpha| + B \ln |x-\beta| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Exemple 5.10 Calculer $\int \frac{1}{x^2-1} dx$.

On a :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2-1} dx &= \int \frac{1}{2(x-1)} dx - \int \frac{1}{2(x+1)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Si $x^2 + px + q$ n'a pas de racines réelles, écrivons :

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

En posant : $\alpha = -\frac{p}{2}$ et $\beta^2 = q - \frac{p^2}{4}$, on obtient :

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

On fait maintenant le changement de variable $x - \alpha = \beta t$ et donc $dx = \beta dt$ et $(x - \alpha)^2 + \beta^2 = \beta^2 (t^2 + 1)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{ax + b}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx = \int \frac{Mt + N}{t^2 + 1} dt \\ &= \int \frac{Mt}{t^2 + 1} dt + \int \frac{N}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + 1) + N \arctan t + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Puis on remplace t par $\frac{x - \alpha}{\beta}$.

Exemple 5.11 Calculer $\int \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 5} dx$.

On a :

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4.$$

En posant : $x + 1 = 2t$ (et donc $dx = 2dt$), on obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int \frac{2t + 3}{4(t^2 + 1)} 2dt = \int \frac{4t}{4(t^2 + 1)} dt + \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + \frac{3}{2} \arctan t + c \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2 + 2x + 5}{4}\right) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

e) Intégration des fractions rationnelles en : e^x :

On utilise le changement de variable $t = e^x$ et donc : $dt = e^x dx$ où $dx = \frac{1}{t} dt$

Exemple 5.12 Calculer $\int \frac{dx}{3-2e^x}$.

On a :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3-2e^x} &= \int \frac{dt}{t(3-2t)} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{3} \int \frac{(-2) dt}{3-2t} \\ &= \frac{1}{3} \ln |t| - \frac{1}{3} \ln |3-2t| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{3} x - \frac{1}{3} \ln |3-2e^x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2- Intégrale du type : $\int P(x) e^{\lambda x} dx$ où P est un polynôme et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

On peut effectuer des intégrations par parties successives selon le degré de P , mais on doit réserver cette méthode au cas où $\deg P$ est petit. Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive de $P(x) e^{\lambda x}$ sous la forme $Q(x) e^{\lambda x}$, avec $\deg P = \deg Q$.

Exemple 5.13 Calculer $\int (5x^2 + 3x - 1) e^{-x} dx$.

On sait que : $\int (5x^2 + 3x - 1) e^{-x} dx = (ax^2 + bx + c) e^{-x}$, et on obtient : a, b, c de la formule suivante :

$$[(ax^2 + bx + c) e^{-x}]' = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c] e^{-x} = (5x^2 + 3x - 1) e^{-x}.$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -a = 5, \\ 2a - b = 3, \\ b - c = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5, \\ b = 2a - 3, \\ c = b + 1, \end{cases} \quad \text{donc : } \begin{cases} a = -5, \\ b = -13, \\ c = -12. \end{cases}$$

Ainsi

$$\int (5x^2 + 3x - 1) e^{-x} dx = (-5x^2 - 13x - 12) e^{-x} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 5.14 Calculer $\int (x^4 - 1) e^{2x} dx$.

On pose : $\int (x^4 - 1) e^{2x} dx = Q(x) e^{2x}$ avec $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \lambda$ où a, b, c, d et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\begin{aligned}
 [Q(x) e^{2x}]' &= (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) e^{2x} + 2(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \lambda) e^{2x} \\
 &= [2ax^4 + (4a + 2b)x^3 + (3b + 2c)x^2 + (2c + 2d)x + (2\lambda + d)] e^{2x} \\
 &= (x^4 - 1) e^{2x}.
 \end{aligned}$$

Par identification on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a = 1, \\ 4a + 2b = 0, \\ 3b + 2c = 0, \\ 2c + 2d = 0, \\ 2\lambda + d = -1. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}, \\ b = -2a, \\ c = -\frac{3}{2}b, \\ d = -c, \\ \lambda = \frac{-1 - d}{2}, \end{array} \right. \quad \text{donc :} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}, \\ b = -1, \\ c = \frac{3}{2}, \\ d = -\frac{3}{2}, \\ \lambda = \frac{1}{4}. \end{array} \right.$$

Alors

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

Ainsi

$$\int (x^4 - 1) e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3- Intégration de certaines fonctions trigonométriques :

a) Transformation en une intégrale de fonctions rationnelles :

Soit une intégrale de la forme $\int f(\sin x, \cos x) dx$. En effectuant le changement de variable : $t = \tan \frac{x}{2}$, les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ s'expriment alors sous formes de fonctions rationnelles. En effet,

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \\
 &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},
 \end{aligned}$$

et

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

et

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t$$

$$\Rightarrow x = 2 \arctan t$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Donc on a :

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\cot x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Exemple 5.15 Calculer $\int \frac{1}{\cos x} dx$.

On a :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt \\
 &= \int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{1}{1-t} dt \\
 &= \ln |1+t| - \ln |1-t| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Remarque 5.6 Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, appelé changement de variable universel pour l'intégration des fonctions trigonométriques résout le problème d'intégration de toute expression de la forme $f(\sin x, \cos x)$ mais conduit fréquemment à des fonctions trop compliquées. Pour cette raison, il est parfois préférable d'utiliser d'autres changements de variables menant plus rapidement au but.

b) Intégrale de type : $\int \cos^p x \sin^q x dx, p \text{ et } q \in \mathbb{N}$.

Premier cas : p est impair

Soit $p = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^p x \sin^q x dx &= \int \cos^{2k+1} x \sin^q x dx \\
 &= \int (1 - \sin^2 x)^k \sin^q x \cos x dx.
 \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \sin x, (dt = (\cos x) dx)$ ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $\int (1 - t^2)^k t^q dt$, c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 5.16 Calculer $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

On a :

$$\begin{aligned}
 \int \cos^5 x \sin^2 x dx &= \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x \cos x dx \\
 &= \int (1 - t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt \\
 &= \frac{1}{7} t^7 - \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\
 &= \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{3} \sin^3 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Deuxième cas : q est impair

Soit $q = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^p x \sin^q x dx &= \int \cos^p x \sin^{2k+1} x dx \\
 &= \int \cos^p x (1 - \cos^2 x)^k \sin x dx.
 \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \cos x$, ($dt = -(\sin x) dx$) ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $-\int t^p (1 - t^2)^k dt$, c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 5.17 Calculer $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$.

On a :

$$\begin{aligned}
 \int \cos^6 x \sin^3 x dx &= \int \cos^6 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx = -\int t^6 (1 - t^2) dt \\
 &= -\int (t^8 - t^6) dt = -\frac{1}{9} t^9 + \frac{1}{7} t^7 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\
 &= -\frac{1}{9} \cos^9 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Troisième cas : Si p et q sont tous les deux pairs, le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ ramène le calcul de $\int \cos^p x \sin^q x dx$ à la recherche de la primitive d'une fraction rationnelle.

c) Intégrale de type : $\int (\cos \alpha x) (\cos \beta x) dx, \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}^*$.

On utilise la formule suivante :

$$(\cos \alpha x) (\cos \beta x) = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) x + \cos (\alpha - \beta) x].$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\int (\cos \alpha x) (\cos \beta x) dx &= \frac{1}{2} \int \cos [(\alpha + \beta) x] dx + \frac{1}{2} \int \cos [(\alpha - \beta) x] dx \\ &= \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \sin [(\alpha + \beta) x] + \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \sin [(\alpha - \beta) x] + c, \quad c \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

tel que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$.

Exemple 5.18 Calculer $\int (\cos 5x) (\cos x) dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int (\cos 5x) (\cos x) dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 6x) dx + \frac{1}{2} \int (\cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 4x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

d) Intégrale de type : $\int (\sin \alpha x) (\cos \beta x) dx, \alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$.

On utilise la formule suivante :

$$(\sin \alpha x) (\cos \beta x) = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) x + \sin (\alpha - \beta) x].$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\int (\sin \alpha x) (\cos \beta x) dx &= \frac{1}{2} \int \sin [(\alpha + \beta) x] dx + \frac{1}{2} \int \sin [(\alpha - \beta) x] dx \\ &= \frac{-1}{2(\alpha + \beta)} \cos (\alpha + \beta) x - \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \cos (\alpha - \beta) x + c, \quad c \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

tel que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$.

Exemple 5.19 Calculer $\int (\sin 4x) (\cos 6x) dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int (\sin 4x) (\cos 6x) dx &= \frac{1}{2} \int \sin (10x) dx + \frac{1}{2} \int \sin (-2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{10} \cos 10x \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{-2} \cos (-2x) \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{-1}{20} \cos 10x + \frac{1}{4} \cos 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

e) Intégrale de type : $\int (\sin \alpha x) (\sin \beta x) dx, \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}^*.$

On utilise la formule suivante :

$$(\sin \alpha x) (\sin \beta x) = \frac{1}{2} [-\cos (\alpha + \beta) x + \cos (\alpha - \beta) x].$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \int (\sin \alpha x) (\sin \beta x) dx &= \frac{-1}{2} \int \cos [(\alpha + \beta) x] dx + \frac{1}{2} \int \cos [(\alpha - \beta) x] dx \\ &= \frac{-1}{2(\alpha + \beta)} \sin (\alpha + \beta) x + \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \sin (\alpha - \beta) x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tel que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$.

Exemple 5.20 Calculer $\int (\sin 3x) (\sin 2x) dx$.

On a :

$$\begin{aligned} \int (\sin 3x) (\sin 2x) dx &= \frac{1}{2} \int [-\cos 5x + \cos x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{5} \sin 5x + \sin x \right] + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{-1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4- Intégrales des fonctions contenant des radicaux :

Fonction de la forme $f \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right)$ où f est soit un polynôme, soit une fraction rationnelle. On suppose que $ad - cb \neq 0$ et $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$, dans ce cas le changement de variable adéquat est $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, il permet de ramener le calcul de l'intégrale à celui de l'intégrale d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle. Expliquons cela sur un exemple.

Exemple 5.21 Calculer $I = \int \frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{x+2}{x}} dx$.

On pose $t = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$, c'est à dire $t^2 = \frac{x+2}{x}$ et par suite $x = \frac{2}{t^2-1}$ et $dx = \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt$. D'où

$$I = \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - 2 \arctan t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

puis on remplace t par $\sqrt{\frac{x+2}{x}}$.

5.7 Exercices

Exercice 5.22 Calculer les primitives suivantes :

- 1) $\int (3x^2 - 8x + 2) dx$
- 2) $\int (\cos 2x) dx$
- 3) $\int \frac{-3}{x+2} dx.$
- 4) $\int \frac{1}{(x+1)^4} dx.$
- 5) $\int \frac{1}{x \ln x} dx.$
- 6) $\int (2x+1)^{10} dx.$

Solution.

- 1) $\int (3x^2 - 8x + 2) dx = x^3 - 4x^2 + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$
- 2) $\int (\cos 2x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$
- 3) $\int \frac{-3}{x+2} dx = -3 \ln |x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$
- 4) $\int \frac{1}{(x+1)^4} dx = \frac{-1}{3} \frac{1}{(x+1)^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$
- 5) $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$
- 6) $\int (2x+1)^{10} dx = \frac{1}{22} \int (11)(2)(2x+1)^{10} dx = \frac{1}{22} (2x+1)^{11} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Exercice 5.23 Calculer les primitives suivantes :

- 1) $\int \frac{4x-4}{x^2-2x+3} dx$
- 2) $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$
- 3) $\int \cos(5x) dx.$
- 4) $\int (2x-2) \sqrt{x^2-2x+3} dx$

Solution.

- 1) Calculons $\int \frac{4x-4}{x^2-2x+3} dx.$

On a,

$$\int \frac{4x-4}{x^2-2x+3} dx = 2 \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx = 2 \ln |x^2-2x+3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2) Calculons $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$.

On a,

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\ln x}{x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int 2 \frac{1}{x} \ln x dx \\ &= \ln |x| + \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Calculons $\int \cos(5x) dx$.

On a,

$$\int \cos(5x) dx = \frac{1}{5} \int 5 \cos(5x) dx = \frac{1}{5} \sin(5x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4) Calculons $\int (2x-2)\sqrt{x^2-2x+3} dx$.

On a,

$$\begin{aligned} \int (2x-2)\sqrt{x^2-2x+3} dx &= \int (2x-2)(x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{(x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{3} (x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 5.24 Calculer les primitives et les intégrales suivantes :

1) $\int (x+1)e^x dx$, $\int_0^1 (x+1)e^x dx$. 2) $\int \frac{1}{(x+1)^{10}} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^{10}} dx$.

3) $\int (\ln x) dx$, $\int_1^e (\ln x) dx$. 4) $\int \frac{dx}{1+e^x}$, $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$.

Solution.

1) Calculons $\int (x+1)e^x dx$.

On utilise l'intégration par parties.

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = x + 1, \\ V'(x) = e^x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1, \\ V(x) = e^x. \end{cases}$$

Donc

$$\int (x + 1) e^x dx = (x + 1) e^x - \int 1 e^x dx = x e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\int_0^1 (x + 1) e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - (0) e^0 = e.$$

2) Calculons $\int \frac{1}{(x + 1)^{10}} dx$.

On pose : $t = x + 1$, donc $dt = dx$. Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x + 1)^{10}} dx &= \int \frac{1}{t^{10}} dt = \int t^{-10} dt = \frac{-1}{9} t^{-9} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{-1}{9(x + 1)^9} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\int_0^1 \frac{1}{(x + 1)^{10}} dx = \left[\frac{-1}{9(x + 1)^9} \right]_0^1 = \left(\frac{-1}{9(1 + 1)^9} \right) - \left(\frac{-1}{9(0 + 1)^9} \right) = \frac{511}{4608}.$$

3) Calculons $\int (\ln x) dx$.

On utilise l'intégration par parties.

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = \ln x, \\ V'(x) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = \frac{1}{x}, \\ V(x) = x. \end{cases}$$

Donc

$$\int (\ln x) dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = -x + x \ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\int_1^e (\ln x) dx = \left[-x + x \ln x \right]_1^e = (-e + e \ln e) - (-1 + 1 \ln 1) = 1.$$

4) Calculons $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

On pose : $t = e^x$, donc $dt = e^x dx$, d'où $dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$.

On a :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{-1}{1+t} \right) dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \ln |t| - \ln |1+t| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= x - \ln |1+e^x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} &= \left[x - \ln |1+e^x| \right]_0^1 = (1 - \ln |1+e|) - (0 - \ln |2|) \\ &= \ln 2 - \ln (e+1) + 1 = 1 + \ln \frac{2}{e+1}. \end{aligned}$$

Exercise 5.25 Calculer les primitives suivantes :

1) $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

2) $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$.

3) $\int \sin^3 x \cos x dx$.

4) $\int_0^\pi \sin^3 x \cos x dx$

Solution.

1) Calculons $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

On pose $t = \sin x \Rightarrow dt = (\cos x) dx$.

On a :

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sin^2 x dx &= \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x \cos x dx \\ &= \int (1 - t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt \\ &= \frac{1}{7} t^7 - \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{3} \sin^3 x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Calculons $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int \cos^6 x \sin^3 x dx &= \int \cos^6 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx = - \int t^6 (1 - t^2) dt \\ &= \int (t^8 - t^6) dt = \frac{1}{9} t^9 - \frac{1}{7} t^7 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{1}{9} \cos^9 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3) Calculons $\int \sin^3 x \cos x dx$.

On pose : $t = \cos x$, donc $dt = -(\sin x) dx$, d'où $dx = \frac{-1}{\sin x} dt$.

Alors

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x dx &= \int (\sin^3 x) t \frac{-1}{\sin x} dt = - \int (\sin^2 x) t dt \\ &= - \int (1 - \cos^2 x) t dt = - \int (1 - t^2) t dt \\ &= -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} t^4 + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2 ème méthode

On pose : $t = \sin x$, donc $dt = (\cos x) dx$, d'où $dx = \frac{1}{\cos x} dt$.

Alors,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x dx &= \int t^3 \cos x \frac{1}{\cos x} dt = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3 ème méthode

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(On a appliqué $\int f \cdot f^n = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$ avec $f(x) = \sin x$ et $n = 3$).

4) Calculons $\int_0^\pi \sin^3 x \cos x dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3 x \cos x dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x \right]_0^\pi \\ &= \left(-\frac{1}{2} \cos^2 \pi + \frac{1}{4} \cos^4 \pi \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos^2 0 + \frac{1}{4} \cos^4 0 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} (-1)^2 + \frac{1}{4} (-1)^4 \right) - \left(-\frac{1}{2} (1)^2 + \frac{1}{4} (1)^4 \right) = 0.\end{aligned}$$

Exercice 5.26 Calculer les primitives suivantes :

$$1) \int x^3 \ln(3x) \, dx. \quad 2) \int (x+1)\sqrt{2x+1} \, dx \quad 3) I = \int \sin(2x)e^{3x} \, dx.$$

1) Calculons $\int x^3 \ln(3x) \, dx$.

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = \ln(3x), \\ V'(x) = x^3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = \frac{1}{x}, \\ V(x) = \frac{x^4}{4}. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln(3x) \, dx &= \frac{x^4}{4} \ln(3x) - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^4}{4} \ln(3x) - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(3x) - \frac{1}{16} x^4 + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Calculons $\int (x+1)\sqrt{2x+1} \, dx$.

On utilise l'intégration par parties.

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = x+1, \\ V'(x) = \sqrt{2x+1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1, \\ V(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int (x+1)\sqrt{2x+1} \, dx &= (x+1) \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{x+1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \int 2(2x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{x+1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Calculer $I = \int \sin(2x)e^{3x} \, dx$.

On utilise l'intégration par parties.

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = \sin 2x, \\ V'(x) = e^{3x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 2 \cos 2x, \\ V(x) = \frac{1}{3}e^{3x}. \end{cases}$$

Donc,

$$I = \sin(2x) \frac{1}{3}e^{3x} - \int 2 \cos(2x) \frac{1}{3}e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} \sin(2x)e^{3x} - \frac{2}{3} \int \cos(2x)e^{3x} \, dx$$

On calcule de $\int e^x \cos(x) dx$, par l'intégration par parties.

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = \cos 2x, \\ V'(x) = e^{3x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = -2 \sin 2x, \\ V(x) = \frac{1}{3} e^{3x}. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int \cos(2x) e^{3x} dx &= \cos(2x) \frac{1}{3} e^{3x} - \int -2 \sin(2x) \frac{1}{3} e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} \cos(2x) e^{3x} + \frac{2}{3} \int \sin(2x) e^{3x} dx. \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \sin(2x) e^{3x} - \frac{2}{3} \int \cos(2x) e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} \sin(2x) e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \cos(2x) e^{3x} + \frac{2}{3} \int \sin(2x) e^{3x} dx \right) \\ &= \frac{1}{3} \sin(2x) e^{3x} - \frac{2}{9} \cos(2x) e^{3x} - \frac{4}{9} \int \sin(2x) e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} \sin(2x) e^{3x} - \frac{2}{9} \cos(2x) e^{3x} - \frac{4}{9} I \\ \Rightarrow I + \frac{4}{9} I &= \frac{1}{3} \sin(2x) e^{3x} - \frac{2}{9} \cos(2x) e^{3x} \\ \Rightarrow \frac{13}{9} I &= \frac{1}{3} \sin(2x) e^{3x} - \frac{2}{9} \cos(2x) e^{3x} \\ \Rightarrow I &= \frac{9}{13} \left(\frac{1}{3} \sin(2x) e^{3x} - \frac{2}{9} \cos(2x) e^{3x} \right) + c, c \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow I &= \frac{3}{13} \sin(2x) e^{3x} - \frac{2}{13} \cos(2x) e^{3x} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 5.27 Calculer les primitives suivantes :

$$1) \int \frac{e^{2x+1}}{2 + 5e^{2x+1}} dx \quad 2) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} dx \quad 3) \int \frac{3}{2x(\ln x)^2} dx$$

Solution.

$$1) \text{ Calculons } \int \frac{e^{(2x+1)}}{2 + 5e^{(2x+1)}} dx.$$

En posant

$$t = e^{(2x+1)} \Rightarrow dt = 2e^{(2x+1)} dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2e^{(2x+1)}} dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2t} dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{(2x+1)}}{2+5e^{(2x+1)}} dx &= \int \frac{t}{2+5t} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2+5t} dt = \frac{1}{10} \int \frac{5}{2+5t} dt \\ &= \frac{1}{10} \ln |2+5t| + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{10} \ln |2+5e^{(2x+1)}| + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2) Calculons $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$.

En posant

$$t = \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x+1} dt \Rightarrow dx = 2t dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{1}{1+t} 2t dt = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt \\ &= 2 \int \left(\frac{t+1}{1+t} + \frac{-1}{1+t} \right) dt = 2 \int 1 dt - 2 \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= 2t - 2 \ln |1+t| + c, c \in \mathbb{R} \\ &= 2\sqrt{x+1} - 2 \ln |1+\sqrt{x+1}| + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3) Calculons $\int \frac{3}{2x(\ln x)^2} dx$.

En posant $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{2x(\ln x)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{3}{2} \int t^{-2} dt \\ &= \frac{3}{2} \frac{t^{-2+1}}{-2+1} dt = \frac{-3}{2} \frac{1}{t} + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{-3}{2 \ln x} + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 5.28 Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

$$1) \int \frac{x^3 + 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x + 1} dx. \quad 2) \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx. \quad 3) \int \frac{7x+6}{x^2-x-6} dx$$

Solution.

$$1) \text{ Calculons } \int \frac{x^3 + 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x + 1} dx.$$

On décompose d'abord $\frac{x^3 + 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x + 1}$ en éléments simples :

On a :

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x + 1} = x + 2 + \frac{x - 5}{x^2 + 2x + 1}.$$

On décompose aussi $\frac{x - 5}{x^2 + 2x + 1}$ en éléments simples :

$$\begin{aligned} \frac{x - 5}{x^2 + 2x + 1} &= \frac{x - 5}{(x + 1)^2} = \frac{a}{(x + 1)} + \frac{b}{(x + 1)^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{a(x + 1) + b}{(x + 1)^2} = \frac{ax + (a + b)}{(x + 1)^2} = \frac{1x + (-5)}{(x + 1)^2}, \end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -6,$$

d'où

$$\frac{x - 5}{(x + 1)^2} = \frac{1}{x + 1} + \frac{-6}{(x + 1)^2}.$$

Donc,

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x + 1} = x + 2 + \left(\frac{x - 5}{x^2 + 2x + 1}\right) = x + 2 + \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{-6}{(x + 1)^2}\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x + 1} dx &= \int \left(x + 2 + \frac{x - 5}{x^2 + 2x + 1}\right) dx \\ &= \int \left(x + 2 + \frac{1}{x + 1} + \frac{-6}{(x + 1)^2}\right) dx \\ &= \int (x + 2) dx + \int \frac{1}{x + 1} dx - 6 \int \frac{1}{(x + 1)^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x + 1| + \frac{6}{x + 1} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Calculons $\int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx$.

On a

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1 - 3}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{-3}{x^2 + x + 1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + x + 1| - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \end{aligned}$$

On calcule l'intégrale $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$,

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(\frac{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + 1 \right) = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right),$$

on pose

$$t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} dt = dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{1}{\frac{3}{4} \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right)} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{(t^2 + 1)} \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(t) + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + x + 1| - \frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + x + 1| - \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + x + 1| - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Calculons $\int \frac{7x+6}{x^2 - x - 6} dx$.

On décompose d'abord $\frac{7x+6}{x^2 - x - 6}$ en éléments simples :

$$\begin{aligned} \frac{7x+6}{x^2 - x - 6} &= \frac{7x+6}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{(a+b)x + (-3a+2b)}{(x+2)(x-3)} = \frac{7x+6}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a+b=7 \\ -3a+2b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+3b=21 \\ -3a+2b=6 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{5}, b = \frac{27}{5},$$

d'où

$$\frac{7x+6}{x^2-x-6} = \frac{7x+6}{(x+2)(x-3)} = \frac{8}{5} \frac{1}{x+2} + \frac{27}{5} \frac{1}{x-3}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int \frac{7x+6}{x^2-x-6} dx &= \int \left(\frac{8}{5} \frac{1}{x+2} + \frac{27}{5} \frac{1}{x-3} \right) dx \\ &= \frac{8}{5} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{27}{5} \int \frac{1}{x-3} dx \\ &= \frac{8}{5} \ln|x+2| + \frac{27}{5} \ln|x-3| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 5.29 Intégrer les fonctions trigonométriques suivantes :

$$1) \int \sin^2 x \cos^2 x dx. \quad 2) \int \sin(3x) \cos(4x) dx.$$

1) Calculons $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

On utilise les deux formules suivantes :

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

d'où,

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = \frac{1}{4} (1 - \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x), \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Calculons $\int \sin(3x) \cos(4x) dx$.

On a,

$$\begin{aligned} \int \sin(3x) \cos(4x) dx &= \int \frac{1}{2} (\sin((3+4)x) + \sin((3-4)x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(7x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(-x) dx \\ &= \frac{-1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos(-x) + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{-1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos x + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 5.30 *Considérons les primitives suivantes :*

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{et} \quad J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

1) Calculer $I + J$ et $I - J$.

2) Dédire I et J .

Solution.

1) Calculons $I + J$ et $I - J$.

On a,

$$\begin{aligned} I + J &= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \right) dx \\ &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int 1 dx = x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} I - J &= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \right) dx \\ &= \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \ln |\sin x + \cos x| + c_2, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) En déduire I et J .

On a,

$$\begin{cases} I + J = x + c_1 \dots \dots \dots (1) \\ I - J = - \ln |\sin x + \cos x| + c_2 \dots \dots (2) \end{cases}$$

De (1) + (2), on a : $2I = x - \ln |\sin x + \cos x| + c_1 + c_2$

$$I = \frac{x}{2} - \frac{\ln |\sin x + \cos x|}{2} + c_3, c_3 \in \mathbb{R}.$$

De (1) - (2), on obtient : $2J = x + \ln |\sin x + \cos x| + c_1 - c_2$

$$J = \frac{x}{2} + \frac{\ln |\sin x + \cos x|}{2} + c_4, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Bibliographie

- [1] J. RIVAUD, Algèbre : Classes préparatoires et Université Tome 1, Exercices avec solutions, Vuibert.
- [2] N. FADDEEV, I. SOMINSKI, Recueil d'exercices d'algèbre supérieure, Edition de Moscou
- [3] M. BALABNE, M. DUFLO, M. FRISH, D. GUEGAN, Géométrie – 2e année du 1er cycle classes préparatoires, Vuibert Université.
- [4] B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, F. BOSCHET, Exercices d'algèbre, 1er cycle scientifique préparation aux grandes écoles 2e année, Armand Colin – Collection U.
- [5] K. ALLAB, *Eléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle*. Office des publications universitaires, (1986).
- [6] B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, F. BOSCHET, *Exercices d'analyse 1er Cycle, 1er Année de Mathématiques Supérieurs*, Librairie Armand Colin (1977).
- [7] D. DEGRAVE, C. DEGRAVE, H. MULLER, *Précis de mathématiques, Analyse- première année*, Bréal, Rosny 2003.
- [8] J. P. ESCOFIER, *Toute l'analyse de la Licence : Cours et exercices corrigés*, Dunod 2014.
- [9] M. MEHBALI, *Mathématiques : (Fonction d'une variable réelle)*, Office des publications universitaires, 1 Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).
- [10] J. M. MONIER, *ANALYSE MPSI / Cours, méthodes et exercices corrigés*, 5^e édition. Dunod, Paris, 2006.