

Série Introduction

On considère la fonction sinusoïdale définie sur une période complète :

$$v(\theta) = V_m \sin(\theta)$$

avec :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

1. Calcul de la valeur moyenne

La valeur moyenne sur une période est définie par :

$$V_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta$$

En remplaçant $v(\theta)$:

$$V_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_m \sin(\theta) d\theta$$

Comme V_m est constante :

$$V_{moy} = \frac{V_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta$$

On sépare l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\theta) d\theta$$

Première intégrale :

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = [-\cos(\theta)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

Deuxième intégrale :

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = [-\cos(\theta)]_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = -1 - 1 = -2$$

Somme :

$$2 + (-2) = 0$$

Donc :

$$\int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0$$

Ainsi :

$$V_{moy} = \frac{V_m}{2\pi} \times 0$$

$$\boxed{V_{moy} = 0}$$

2. Calcul de la valeur efficace

La valeur efficace est définie par :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^2(\theta) d\theta}$$

Remplacement :

$$\begin{aligned} V_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (V_m \sin(\theta))^2 d\theta} \\ &= \sqrt{\frac{V_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta} \end{aligned}$$

On utilise l'identité trigonométrique :

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} 1 d\theta - \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \right]\end{aligned}$$

Première intégrale :

$$\int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

Deuxième intégrale :

$$\begin{aligned}\int \cos(2\theta) d\theta &= \frac{\sin(2\theta)}{2} \\ \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} &= \frac{\sin(4\pi)}{2} - \frac{\sin(0)}{2} = 0\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \pi$$

Finalement :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2\pi}} \times \pi = \sqrt{\frac{V_m^2}{2}}$$

$$\boxed{V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

3. Signal redressé simple alternance

On considère maintenant le signal :

$$v(\theta) = \begin{cases} V_m \sin(\theta) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Valeur moyenne

$$V_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta$$

Comme le signal est nul entre π et 2π :

$$V_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} V_m \sin(\theta) d\theta$$

$$V_{moy} = \frac{V_m}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = [-\cos(\theta)]_0^{\pi} = 2$$

Donc :

$$V_{moy} = \frac{V_m}{2\pi} \times 2$$

$$V_{moy} = \frac{V_m}{\pi}$$

Valeur efficace

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^2(\theta) d\theta}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (V_m \sin(\theta))^2 d\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{V_m^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2\pi} \times \frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{V_m^2}{4}}$$

$$V_{eff} = \frac{V_m}{2}$$

4. Signal redressé double alternance

Le signal redressé double alternance est obtenu en prenant la valeur absolue du sinus sur toute la période :

$$v(\theta) = |V_m \sin(\theta)|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Valeur moyenne

$$V_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |V_m \sin(\theta)| d\theta$$

Comme le signal est symétrique et positif sur toute la période :

$$V_{moy} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} V_m \sin(\theta) d\theta$$

$$V_{moy} = \frac{V_m}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = [-\cos(\theta)]_0^{\pi} = 2$$

$$\boxed{V_{moy} = \frac{2V_m}{\pi}}$$

Valeur efficace

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (V_m \sin(\theta))^2 d\theta}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} (V_m \sin(\theta))^2 d\theta}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{V_m^2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{V_m^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2}}$$

$$\boxed{V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

5. Signal échelonné (0 à $2T/3$ puis $-E/2$)

On considère le signal périodique suivant sur une période T :

$$v(t) = \begin{cases} E & 0 \leq t \leq \frac{2T}{3} \\ -\frac{E}{2} & \frac{2T}{3} \leq t \leq T \end{cases}$$

Valeur moyenne

$$V_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{2T}{3}} E dt + \int_{\frac{2T}{3}}^T \left(-\frac{E}{2} \right) dt \right]$$

Calcul des intégrales :

$$\int_0^{\frac{2T}{3}} E dt = E \cdot \frac{2T}{3} = \frac{2ET}{3}$$

$$\int_{\frac{2T}{3}}^T \left(-\frac{E}{2} \right) dt = -\frac{E}{2} \cdot \frac{T}{3} = -\frac{ET}{6}$$

Somme :

$$\frac{2ET}{3} - \frac{ET}{6} = \frac{4ET - ET}{6} = \frac{3ET}{6} = \frac{ET}{2}$$

Donc :

$$V_{moy} = \frac{1}{T} \cdot \frac{ET}{2} = \frac{E}{2}$$

$$\boxed{V_{moy} = \frac{E}{2}}$$

Valeur efficace

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{2T}{3}} E^2 dt + \int_{\frac{2T}{3}}^T \left(-\frac{E}{2}\right)^2 dt \right]}$$

Calcul des intégrales :

$$\int_0^{\frac{2T}{3}} E^2 dt = E^2 \cdot \frac{2T}{3} = \frac{2E^2T}{3}$$

$$\int_{\frac{2T}{3}}^T \left(\frac{E}{2}\right)^2 dt = \frac{E^2}{4} \cdot \frac{T}{3} = \frac{E^2T}{12}$$

Somme :

$$\frac{2E^2T}{3} + \frac{E^2T}{12} = \frac{8E^2T}{12} + \frac{E^2T}{12} = \frac{9E^2T}{12} = \frac{3E^2T}{4}$$

Donc :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{3E^2T}{4}} = \sqrt{\frac{3E^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}E$$

$$\boxed{V_{eff} = \frac{\sqrt{3}}{2}E}$$