
Série de TD N°01 – Algèbre 2

Exercice 1 : On considère dans $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles F et G définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\} \quad , \quad G = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels (s.e.v) de $\mathbb{R}^3$.
 2. Donner une base de F et de G , quelle est leur dimension ?.
 3. A t-on $F = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^3$?.
-

Exercice 2 : On considère dans $\mathbb{R}^4$, le sous-ensemble F défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (x + z = 0) \wedge (y + t = 0)\}$$

1. Montrer que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$.
 2. Donner une base de F , déduire sa dimension.
-

Exercice 3 : $E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ et $E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$ deux s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

1. $E_1 \cap E_2$ et $E_1 \cup E_2$ sont-ils des s.e.v de $\mathbb{R}^2$.
 2. Montrer que $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$.
-

Exercice 4 :

1. Montrer que la famille $F = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
 2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\omega = (5, -3)$ dans la base F .
 3. Les familles F_1 et F_2 suivantes sont-elles libres :
 $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $F_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 0)\}$
 4. Montrer que la famille F est une base de $\mathbb{R}^2$, et que F_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.
-

Exercice 5 : Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (x + y, x - y)$$

1. Montrer que f est linéaire.
 2. Calculer $\ker f$, $\text{Im} f$ et donner leurs dimensions. f est-elle bijective ? . Si oui, donner f^{-1} .
 3. Déterminer $f \circ f$.
 4. A t-on $\ker f \oplus \text{Im} f = \mathbb{R}^2$?.
-

Exercice 6 : Soit l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y)$$

1. Déterminer $\ker f$, $\text{Im} f$ et donner leurs dimensions.
 2. f est-elle injective, surjective ? , Justifier.
-

Exercice 7 : Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que :

$$f(e_1) = (1, -1), \quad f(e_2) = (2, 3), \quad f(e_3) = (-1, 2)$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 : (supplémentaire) : Soit l'application h définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$h(x, y, z) = (\alpha x + \beta, x + y + z, -x)$$

1. Pour quelles valeurs de α et β , h est-elle linéaire ?.
 2. Parmi ces valeurs, lesquelles vérifient $h \circ h = h$? . Dans ce cas, on note h par P .
 3. Déterminer $\ker P$ et $\text{Im} P$, puis montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker P \oplus \text{Im} P$.
-