Corrigés d'exercices de la série N° 01 (Algèbre II)

Exercice 1 :

On va montrer que $(E, \oplus, \otimes)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$:

D'abord, on vérifie que $\oplus$ est interne et $\otimes$ est externe, en effet :

- Soient $(x,y), (x',y') \in E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

c-à-d : $x > 0$, $x' > 0$ et $y, y' \in \mathbb{R}$

donc : $xx' > 0$ et $y + y' \in \mathbb{R}$

donc : $(x,y) \oplus (x',y') = (xx', y+y') \in E$.

D'où : $\oplus$ est interne.

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in E$, c-à-d : $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, donc : $x^\lambda > 0$ et $\lambda y \in \mathbb{R}$

donc : $\lambda \otimes (x,y) = (x^\lambda, \lambda y) \in E$.

D'où : $\otimes$ est externe.

Maintenant, on montre que :

1) $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif :

a) $\oplus$ est associative sur E :

- Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in E$, on a :

$((x,y) \oplus (x',y')) \oplus (x'',y'')$

$= (xx', y+y') \oplus (x'',y'')$

$= ((xx')x'', (y+y')+y'')$

$= (x(x'x''), y+(y'+y''))$

$= (x,y) \oplus (x'x'', y'+y'')$

$= (x,y) \oplus ((x',y') \oplus (x'',y''))$.

b) $\oplus$ est commutative sur E :

- Soient $(x,y), (x',y') \in E$, on a :

$$(x,y) \oplus (x',y') = (xx', y+y') = (x'x, y'+y) = (x',y') \oplus (x,y)$$

c) L'élément neutre pour la loi $\oplus$

- Soit $(x,y) \in E$, c-à-d : $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$

On cherche $(e,e') \in E$ tel que :

$(x,y) \oplus (e,e') = (e,e') \oplus (x,y) = (x,y)$

puisque $\oplus$ est commutative, on va montrer que $(x,y) \oplus (e,e') = (x,y)$

ou bien $(e,e') \oplus (x,y) = (x,y)$

On a : $(x,y) \oplus (e,e') = (x,y)$

$$\iff (xe, y+e') = (x,y)$$

$$\iff \begin{cases} xe = x \\ y+e' = y \end{cases} \iff \begin{cases} e = 1 \\ e' = 0 \end{cases}$$

D'où : $(e,e') = (1,0) \in E$ est l'élément neutre par rapport à $\oplus$.

d) L'élément symétrique de $(x,y) \in E$:

- Soit $(x,y) \in E$, c-à-d : $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

On cherche $(x',y') \in E$ tel que :

$(x,y) \oplus (x',y') = (x',y') \oplus (x,y) = (e,e') \xrightarrow{\boxed{\text{d'après c)}}} = (1,0)$

puisque $\oplus$ est commutative, on va montrer que : $(x,y) \oplus (x',y') = (1,0)$

ou bien $(x',y') \oplus (x,y) = (1,0)$

On a : $(x,y) \oplus (x',y') = (1,0)$

$$\iff (xx', y+y') = (1,0)$$

$$\iff \begin{cases} xx' = 1 \\ y+y' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{x} > 0 \\ y' = -y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où : $(x',y') = (\frac{1}{x}, -y) \in E$ est l'élément symétrique de (x,y) par rapport à $\oplus$.

D'où : $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y),(x',y') \in E$:

$\lambda \otimes ((x,y) \oplus (x',y')) = (\lambda \otimes (x,y)) \oplus (\lambda \otimes (x',y'))$

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y),(x',y') \in E$, on a :

$\lambda \otimes ((x,y) \oplus (x',y'))$

$= \lambda \otimes (xx', y+y')$

$= ((xx')^\lambda, \lambda(y+y'))$

$= (x^\lambda (x')^\lambda, \lambda y + \lambda y')$

$= (x^\lambda, \lambda y) \oplus ((x')^\lambda, \lambda y')$

$= (\lambda \otimes (x,y)) \oplus (\lambda \otimes (x',y'))$

3) $\forall \lambda, \nu \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in E$:

$(\lambda+\nu) \otimes (x,y) = (\lambda \otimes (x,y)) \oplus (\nu \otimes (x,y))$

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in E$, on a :

$(\lambda+\nu) \otimes (x,y)$

$= (x^{(\lambda+\nu)}, (\lambda+\nu)y)$

$= (x^\lambda x^\nu, \lambda y + \nu y)$

$= (x^\lambda, \lambda y) \oplus (x^\nu, \nu y)$

$= (\lambda \otimes (x,y)) \oplus (\nu \otimes (x,y))$

4) $\forall \lambda, \nu \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in E$:

$\lambda \otimes (\nu \otimes (x,y)) = (\lambda\nu) \otimes (x,y)$

- Soient $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in E$, on a :

$\lambda \otimes (\nu \otimes (x,y))$

$= \lambda \otimes (x^\nu, \nu y) = ((x^\nu)^\lambda, \lambda(\nu y))$

$= (x^{\nu\lambda}, (\lambda\nu)y)$

$= (x^{\lambda\nu}, (\lambda\nu)y)$

$= (\lambda\nu) \otimes (x,y)$

5) $\forall (x,y) \in E$: $1 \otimes (x,y) = (x,y)$

- Soient $(x,y) \in E$, on a :

$1 \otimes (x,y) = (x^1, 1y) = (x,y)$

Finalement, $(E, \oplus, \otimes)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

On verra si les ensembles suivants sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$:

1) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y \text{ et } z = 0\}$

- On a $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F_1$, car : $0 = 2 \times 0$ et $z = 0$, donc : $F_1 \neq \phi$.

- Soient $(x,y,z),(x',y',z') \in F_1$, donc : $(x = 2y$ et $z = 0)$ et $(x' = 2y'$ et $z' = 0)$

On a :

$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$

avec : $x + x' = 2y + 2y' = 2(y+y')$

et $z + z' = 0 + 0 = 0$.

Donc : $(x+x', y+y', z+z') \in F_1$.

D'où : $(x,y,z) + (x',y',z') \in F_1$.

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) \in F_1$, donc : $x = 2y$ et $z = 0$

On a : $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, avec :

$\lambda x = \lambda(2y) = 2(\lambda y)$

et $\lambda z = \lambda \times 0 = 0$.

Donc : $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F_1$.

D'où : $\lambda(x,y,z) \in F_1$

Finalement, $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y \text{ et } z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.