2) $F_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / xy=0\}$.

- On a $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in F_2$, car : $0\times 0=0$, donc : $F_2\neq\phi$.
- Soient $(x,y,z),(x',y',z')\in F_2$, donc : $xy=0$ et $x'y'=0$

On a :

$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$

avec : $(x+x')(y+y')=xy+xy'+x'y+x'y'$
$=0+xy'+x'y+0$
$=xy'+x'y$
($\neq 0$ en général)

Exemple : pour $(2,0,2),(0,1,-1)\in F_2$

on remarque que :

$(2,0,2)+(0,1,-1)=(2,1,1)\notin F_2$,

car : $2\times 1\neq 0$

D'où : F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) $F_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+3z=0\}$

- On a $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in F_3$, car : $0+0+3\times 0=0$, donc : $F_3\neq\phi$.
- Soient $\lambda,\nu\in\mathbb{R}$ et (x,y,z), $(x',y',z')\in F_3$, donc :

$x+y+3z=0$ et $x'+y'+3z'=0$

On a :

$\lambda(x,y,z)+\nu(x',y',z')$
$=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)+(\nu x',\nu y',\nu z')$
$=(\lambda x+\nu x',\lambda y+\nu y',\lambda z+\nu z')$, avec :
$(\lambda x+\nu x')+(\lambda y+\nu y')+3(\lambda z+\nu z')$
$=\lambda x+\nu x'+\lambda y+\nu y'+3\lambda z+3\nu z'$
$=\lambda(x+y+3z)+\nu(x'+y'+3z')$
$=\lambda\times 0+\nu\times 0=0$

Donc : $(\lambda x+\nu x',\lambda y+\nu y',\lambda z+\nu z')\in F_3$

D'où : $\lambda(x,y,z)+\nu(x',y',z')\in F_3$.

Finalement, $F_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4) $F_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+3z=2\}$

- On a $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\notin F_4$, car : $0+0+3\times 0\neq 2$, donc $F_4=\phi$.

D'où : F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 :

On va montrer que : $\mathbb{R}^3=G_1\oplus G_2$

c-à-d : $\begin{cases}\mathbb{R}^3=G_1+G_2\\ \text{et}\\ G_1\cap G_2=\{0_{\mathbb{R}^3}\}=\{(0,0,0)\}\end{cases}$

1) $\mathbb{R}^3=G_1+G_2$

$\Longleftrightarrow\begin{cases}G_1+G_2\subset\mathbb{R}^3\\ \text{et}\\ \mathbb{R}^3\subset G_1+G_2\end{cases}$

- $G_1+G_2\subset\mathbb{R}^3$:

On a : G_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ et G_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$, donc : G_1+G_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

D'où : $\boxed{G_1+G_2\subset\mathbb{R}^3}$

- $\mathbb{R}^3\subset G_1+G_2$:

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$(x,y,z)=(x,x,x)+(0,y-x,z-x)$

où $(x,x,x)\in G_1$ et $(0,y-x,z-x)\in G_2$

Donc : $(x,y,z) \in G_1 + G_2$.

D'où : $\boxed{\mathbb{R}^3 \subset G_1 + G_2}$.

Donc : $\mathbb{R}^3 = G_1 + G_2$ --- (1)

2) $G_1 \cap G_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0,0,0)\}$.

• 1ère méthode : On montre que :

$$\begin{cases} \{(0,0,0)\} \subset G_1 \cap G_2 \\ \text{et} \\ G_1 \cap G_2 \subset \{(0,0,0)\} \end{cases}$$

• $\{(0,0,0)\} \subset G_1 \cap G_2$:

On a : $(0,0,0) \in G_1$ (G_1 s.e.v de $\mathbb{R}^3$) et $(0,0,0) \in G_2$ (G_2 s.e.v de $\mathbb{R}^3$), donc : $(0,0,0) \in G_1 \cap G_2$, d'où :

$$\boxed{\{(0,0,0)\} \subset G_1 \cap G_2}$$

• $G_1 \cap G_2 \subset \{(0,0,0)\}$:

- Soit $(x,y,z) \in G_1 \cap G_2$, donc :

$$\begin{cases} (x,y,z) \in G_1 \\ \text{et} \\ (x,y,z) \in G_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ \text{et} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

D'où : $\boxed{G_1 \cap G_2 \subset \{(0,0,0)\}}$.

Donc : $G_1 \cap G_2 = \{(0,0,0)\}$ --- (2).

De (1) et (2), on trouve :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = G_1 \oplus G_2}.$$

• 2ème Méthode : pour montrer que : $G_1 \cap G_2 = \{(0,0,0)\}$.

On a :

$$G_1 \cap G_2 \overset{\text{déf}}{=} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) \in G_1 \text{ et } (x,y,z) \in G_2\right\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z \text{ et } x = 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z = 0\}$$

$$= \{(0,0,0)\}.$$

Exercice 4 :

1) On écrire v_4 comme combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, v_3.

- On cherche donc trois scalaire $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

$$\Leftrightarrow (1,1,1) = \lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(1,1,0)$$

$$\Leftrightarrow (1,1,1) = (0,\lambda_1,\lambda_1) + (\lambda_2,0,\lambda_2) + (\lambda_3,\lambda_3,0)$$

$$\Leftrightarrow (1,1,1) = (\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 & \text{--- (1)} \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 1 & \text{--- (2)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

De (1), on a : $\lambda_2 = 1 - \lambda_3$ --- (4)

et de (2), on a : $\lambda_1 = 1 - \lambda_3$ --- (5)

on remplace (4) et (5) dans (3), on obtient : $1 - \lambda_3 + 1 - \lambda_3 = 1$

$$\Leftrightarrow -2\lambda_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda_3 = \frac{1}{2}}$$

De (4), on a : $\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2}}$

et de (5), on a : $\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{2}}$

D'où : $\boxed{v_4 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3}$

2) On montre que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre :