

pour montrer que $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\}$ est libre, on va montrer que les vecteurs $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ sont linéairement indépendants (ou libres), en effet =

- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Alors on a = $\lambda_1 \vartheta_1 + \lambda_2 \vartheta_2 + \lambda_3 \vartheta_3 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(0, 1, 1) + \lambda_2(1, 0, 1) + \lambda_3(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (0, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0, \lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \text{--- (1)} \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \text{--- (2)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

De (1) et (2), on a = $\begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \end{cases}$

on remplace dans (3), on obtient =

$$-2\lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_3 = 0}$$

et donc = $\boxed{\lambda_2 = 0}$ et $\boxed{\lambda_1 = 0}$.

On a montré donc : $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} :$

$$\lambda_1 \vartheta_1 + \lambda_2 \vartheta_2 + \lambda_3 \vartheta_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc = les vecteurs $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ sont libres. Alors la famille $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\}$ est libre.

3) On verra si u_4 s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3 =

$$u_1, u_2, u_3 =$$

- On cherche trois scalaires

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ tels que =}$$

$$u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$

$$\Leftrightarrow (2, -5, 3) = \lambda_1(1, -3, 2) + \lambda_2(2, -4, -1) + \lambda_3(1, -5, 7)$$

$$\Leftrightarrow (2, -5, 3) = (\lambda_1, -3\lambda_1, 2\lambda_1) + (2\lambda_2, -4\lambda_2, -\lambda_2) + (\lambda_3, -5\lambda_3, 7\lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow (2, -5, 3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, -3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 2 & \text{--- (1)} \\ -3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 = -5 & \text{--- (2)} \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 3 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

De (1), on a = $\lambda_1 = 2 - 2\lambda_2 - \lambda_3$ --- (4)

on remplace (4) dans (2) et (3), on obtient =

$$\begin{cases} -3(2 - 2\lambda_2 - \lambda_3) - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 = -5 \\ 2(2 - 2\lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 1 \\ -5\lambda_2 + 5\lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{1}{2}! \\ \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{1}{5}! \end{cases} \text{ (impossible)}$$

donc = λ_1, λ_2 et λ_3 n'existent pas

pour que = $u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$

On ne peut pas écrire u_4 comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3 .

4) On verra si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

donc on verra si les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont libres =

- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Alors on a =