$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$\Leftrightarrow \lambda_1(1,-3,2) + \lambda_2(2,-4,-1) + \lambda_3(1,-5,7) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (\lambda_1, -3\lambda_1, 2\lambda_1) + (2\lambda_2, -4\lambda_2, -\lambda_2) + (\lambda_3, -5\lambda_3, 7\lambda_3) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, -3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \text{--- (1)} \\ -3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 & \text{--- (2)} \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

De (1), on a : $\lambda_1 = -2\lambda_2 - \lambda_3$

on remplace cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\begin{cases} -3(-2\lambda_2 - \lambda_3) - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ 2(-2\lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\lambda_2 = \lambda_3}$$

et par suite : $\boxed{\lambda_1 = -3\lambda_3}$

On a montré donc :

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = (0,0,0)$

$\not\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Donc : les vecteurs U_1, U_2, U_3 ne sont pas libre, c-à-d : liés.

D'où : la famille $\{U_1, U_2, U_3\}$ est liée.

Exercice 5 :

1) on montre que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$:

On a :

$F = \{(x-y, 2x+y+4z, 3y+2z) / x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x, 2x, 0) + (-y, y, 3y) + (0, 4z, 2z) / x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,2,0) + y(-1,1,3) + z(0,4,2) / x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}((1,2,0), (-1,1,3), (0,4,2))$

$= \langle (1,2,0), (-1,1,3), (0,4,2) \rangle$.

Donc : F est le sous-espace engendré par les vecteurs $(1,2,0), (-1,1,3), (0,4,2)$ de $\mathbb{R}^3$.

D'où : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(ou bien, on montre que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ par la méthode comme dans l'exercice 2).

2) Une base de F :

On a : $F = \text{Vect}((1,2,0), (-1,1,3), (0,4,2))$

donc on verra si les vecteurs $(1,2,0), (-1,1,3), (0,4,2)$ sont libres ou non :

- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a :

$\lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(-1,1,3) + \lambda_3(0,4,2) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1, 0) + (-\lambda_2, \lambda_2, 3\lambda_2) + (0, 4\lambda_3, 2\lambda_3) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3, 3\lambda_2 + 2\lambda_3) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & \text{--- (1)} \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & \text{--- (2)} \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

De (1), on a : $\lambda_1 = \lambda_2$, on remplace cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 & \dots (4) \\ 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & \dots (5) \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \dots (6) \end{cases}$$

(5) - (6) : $2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 0}$

on remplace dans (5) : $\boxed{\lambda_2 = 0}$

et de (4) : $\boxed{\lambda_1 = 0}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Par suite, les vecteurs $(1,2,0)$, $(-1,1,3)$, $(0,4,2)$ sont libres.

D'où :

la famille $\{(1,2,0), (-1,1,3), (0,4,2)\}$ est une base de F.

Donc : $\dim F = 3$.

3) Puisque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $\dim F = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors $F = \mathbb{R}^3$.

Remarque : (exercice 4, 4ème question)

4- Les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont liés, donc on peut écrire l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

on a : $\begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$

si on pose : $\lambda_3 = 1$, alors $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 1$.

alors

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow -3.u_1 + 1.u_2 + 1.u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow -3u_1 + u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 3u_1 - u_3 \\ \text{ou} \\ u_3 = 3u_1 - u_2 \\ \text{ou} \\ u_1 = \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 \end{cases}$$

Fin