

3.1 Introduction

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents, comme : L'ensemble des vecteurs du plan, l'ensemble des fonctions, l'ensemble des polynômes, l'ensemble des matrices,...

3.2 Espace Vectoriel, Base, Dimension

3.2.1 Lois de composition interne

Définition 3.1 Soit E un ensemble non vide.

On appelle " $*$ " loi (opération) de composition interne dans E l'application de $E \times E$ dans E .

$$\begin{aligned} * : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x * y \end{aligned}$$

C'est à dire $\forall x, y \in E : x * y \in E$.

Exemple 3.1 L'addition dans $\mathbb{R}$ est une opération interne car : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

La multiplication dans $\mathbb{R}$ est une opération interne car : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \times y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \times y \end{aligned}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et " $*$ ", " $\triangle$ " deux lois de composition interne dans E , alors :

1) On dit que " $*$ " est commutative dans E si et seulement si et seulement si :

$$\forall x, y \in E : x * y = y * x.$$

2) On dit que " $*$ " est associative dans E si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E : (x * y) * z = x * (y * z).$$

3) Soit $e \in E$, on dit que " e " est un élément neutre de " $*$ " dans E si et seulement si :

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x.$$

4) Soit $x \in E$, on dit que x' de E est le symétrique de x si et seulement si :

$$x * x' = x' * x = e.$$

5) On dit que " $*$ " est distributive par rapport à " Δ " si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E; \begin{cases} x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z) \\ (x \Delta y) * z = (x * z) \Delta (y * z) \end{cases}$$

3.2.2 Groupes

Définition 3.2 Soit E un ensemble muni d'une loi " $*$ ". On dit que $(E, *)$ est un groupe si et seulement si :

- 1) La loi " $*$ " est interne dans E .
- 2) La loi " $*$ " est associative.
- 3) La loi " $*$ " admet un élément neutre dans E .
- 4) Tout élément de E admet un symétrique pour la loi " $*$ ".

Et si de plus " $*$ " est commutative, on dit que E est un groupe abélien (ou commutatif).

Exemple 3.2 $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes abéliens.

$(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car les éléments de $\mathbb{N}^*$ n'ont pas de symétrique.

Exemple 3.3 Soit $E = \{-1, 1\}$, on a : $(E, \times)$ est un groupe abélien.

3.3 Espaces vectoriels

Dans cette partie, $(\mathbb{k}, +, \cdot)$ désigne un corps commutatif, en pratique $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. On note par $1_{\mathbb{k}}$ l'élément neutre pour la loi " $\cdot$ ".

3.3.1 Structure d'espace vectoriel

On appelle $\mathbb{k}$ –espace vectoriel (ou espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$) tout ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $\oplus$ et d'une loi de composition externe notée $\otimes$

$$\begin{aligned} \oplus : E \times E &\rightarrow E & \otimes : \mathbb{k} \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x \oplus y & (\lambda, y) &\mapsto \lambda \otimes y \end{aligned}$$

tels que :

1. $(E, \oplus)$ est un groupe abélien.
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall x \in E :$
 - a) $(\lambda + \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x)$
 - b) $\lambda \otimes (\mu \otimes x) = (\lambda \cdot \mu) \otimes x$
3. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} : \lambda \otimes (x \oplus y) = (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y)$
4. $\forall x \in E, 1_{\mathbb{k}} \otimes x = x$ avec $1_{\mathbb{k}}$ l'élément neutre de $\mathbb{k}$ pour la deuxième loi (la multiplication).

Lorsqu'on ne change pas le corps de base $\mathbb{k}$ on peut utiliser l'expression espace vectoriel au lieu de $\mathbb{k}$ –espace vectoriel.

Exemples et conséquences

- a) $E = \mathbb{R}^2, \mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \\ \otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x', y')) &\mapsto \lambda \otimes (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel.

b) Le corps $\mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}$ –espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$, dans ce cas les éléments de $\mathbb{k}$ sont considérés simultanément comme vecteurs et scalaires.

c) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel et en général si $\mathbb{k} \subset L$ alors L est un $\mathbb{k}$ –espace vectoriel.

Conséquences

Théorème 3.4 Soient $(E, \oplus, \otimes)$ un $\mathbb{k}$ –espace vectoriel, $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ et $x, y \in E$, alors on a

1. $\lambda \otimes x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{k}} \text{ ou } x = 0_E$
2. $(\lambda - \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) - (\mu \otimes x)$
3. $\lambda \otimes (x - y) = (\lambda \otimes x) - (\lambda \otimes y)$

Preuve. $\implies$) $\lambda \otimes x = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{k}}$ ou $x = 0_E$?

Supposons que $\lambda \otimes x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{k}}$ et montrons que $x = 0_E$.

Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{k}}$, alors λ^{-1} existe dans $\mathbb{k}$ (car $\mathbb{k}$ est un corps). On a

$$\lambda^{-1} \otimes (\lambda \otimes x) = \lambda^{-1} \otimes 0_E = 0_E$$

et

$$\lambda^{-1} \otimes (\lambda \otimes x) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \otimes x = 1_{\mathbb{k}} \otimes x = x.$$

Donc $x = 0_E$.

$\Longleftarrow$) $\lambda = 0_{\mathbb{k}}$ ou $x = 0_E \implies \lambda \otimes x = 0_E$?

Supposons $\lambda = 0_{\mathbb{k}}$. On a

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{k}} \otimes x &= (0_{\mathbb{k}} + 0_{\mathbb{k}}) \otimes x \\ &= (0_{\mathbb{k}} \otimes x) \oplus (0_{\mathbb{k}} \otimes x). \end{aligned}$$

En composant par $-(0_{\mathbb{k}} \otimes x)$, on trouve $0_{\mathbb{k}} \otimes x = 0_E$.

Supposons maintenant que $x = 0_E$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes 0_E &= \lambda \otimes (0_E + 0_E) \\ &= (\lambda \otimes 0_E) \oplus (\lambda \otimes 0_E). \end{aligned}$$

En composant par $-(\lambda \otimes 0_E)$, on trouve $\lambda \otimes 0_E = 0_E$.

2. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes x &= (\lambda - \mu + \mu) \otimes x \\ &= [(\lambda - \mu) \otimes x] \oplus (\mu \otimes x). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$(\lambda - \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) - (\mu \otimes x).$$

3. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes x &= \lambda \otimes (x - y \oplus y) \\ &= [\lambda \otimes (x - y)] \oplus (\lambda \otimes y). \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\lambda \otimes (x - y) = (\lambda \otimes x) - (\lambda \otimes y)$. ■

Appellations et conventions

- On appelle les éléments de E , les **vecteurs**.
- On appelle les éléments de $\mathbb{k}$, les **scalaires**.
- Loi de composition interne $\oplus$ sera notée par $+$
- Loi de composition externe $\otimes$ sera noté par $\cdot$ ou $\times$

Théorème 3.5 Soient $(E, +, \times)$ un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel, $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ et $x, y \in E$, alors on a

- 1) $\lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{k}} \text{ ou } x = 0_E$
- 2) $(\lambda - \mu).x = (\lambda.x) - (\mu.x)$
- 3) $\lambda.(x - y) = (\lambda.x) - (\lambda.y)$

Exemple 3.6 1) $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

2) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est noté $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3) L'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est noté $S(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

4) L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, est noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

5) L'ensemble des polynômes des degrés n à coefficients dans $\mathbb{R}$, est noté $\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3.3.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3.3 Soient E un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel et F un sous ensemble de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) F \neq \emptyset, \\ 2) \forall x, y \in F, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{k}, (\lambda.x + \beta.y) \in F. \end{array} \right.$$

Remarques

1. $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v. de E .
2. $\mathbb{R} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ est un s.e.v. de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur le corps $\mathbb{R}$.
3. Si F est un s.e.v. de E et E est un s.e.v. de G alors F est un s.e.v. de G .

Exemple 3.7 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$.

F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E , supplémentaires dans E .

Exercice 3.8 Soient les ensembles suivants :

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\},$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}.$$

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}.$$

1) Montrer que F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) F_3 est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Solution.

1) Montrons que $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

On va montrer que :

$$F_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, (\lambda.X + \beta.Y) \in F_1.$$

On a : $F_1 \neq \emptyset$, car $(0, 0) \in F_1$.

Soient $X, Y \in F_1$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_1 \Rightarrow X = (x_1, x_2) \quad \text{et} \quad x_1 = x_2$$

$$Y \in F_1 \Rightarrow Y = (y_1, y_2) \quad \text{et} \quad y_1 = y_2$$

On a :

$$\begin{aligned} \lambda.X + \beta.Y &= \lambda.(x_1, x_2) + \beta.(y_1, y_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\beta y_1, \beta y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2) \end{aligned}$$

De plus on a : $\lambda x_1 + \beta y_1 = \lambda x_2 + \beta y_2$ car $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Alors, $\lambda.X + \beta.Y \in F_1$

Donc, F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que : $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On va montrer que :

$$F_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, (\lambda.X + \beta.Y) \in F_2.$$

On a : $F_2 \neq \emptyset$, car $(0, 0, 0) \in F_2$, puisque $0 + 0 + 2.0 = 0$

Soient $X, Y \in F_2$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \dots (1)$$

$$Y \in F_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 \dots (2)$$

On a :

$$\begin{aligned}\lambda.X + \beta.Y &= \lambda.(x_1, x_2, x_3) + \beta.(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3) \\ &= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2, \lambda x_3 + \beta y_3)\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}(\lambda x_1 + \beta y_1) + (\lambda x_2 + \beta y_2) + 2(\lambda x_3 + \beta y_3) &= \underbrace{\lambda(x_1 + x_2 + 2x_3)}_{(1)} + \underbrace{\beta(y_1 + y_2 + 2y_3)}_{(2)} \\ &= \lambda.0 + \beta.0 = 0\end{aligned}$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_2$.

Donc, F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

F_3 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

$$F_3 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_3.$$

On a : $(0, 0, 0) \notin F_3$ car $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$.

Alors, $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$ n'est pas un sous espace vectoriel.

Proposition 3.1 Soient E un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . L'ensemble défini par

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme** de F_1 et F_2 .

Preuve. 1. $F_1 + F_2 \neq \emptyset$ car $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$.

2. Soient $x, y \in F_1 + F_2$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{k}$

$$x \in F_1 + F_2 \implies x = x_1 + x_2 : x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2$$

et

$$y \in F_1 + F_2 \implies y = y_1 + y_2 : y_1 \in F_1 \text{ et } y_2 \in F_2.$$

Montrons que $\lambda x + \beta y \in F_1 + F_2$. On a

$$\begin{aligned}\lambda x + \beta y &= \lambda(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \beta y_1) + (\lambda x_2 + \beta y_2) \in F_1 + F_2.\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2 *Soient E un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel, F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E . Alors, on a*

$$\begin{aligned}
 F_1 + F_2 &= F_2 + F_1, & F_1 \cap F_2 &= F_2 \cap F_1, & F_1 \cap F_1 &= F_1 \\
 F_1 &\subset F_1 + F_2, & F_1 \cap F_2 &\subset F_1, & F_1 \cap F_2 &\subset F_2 \\
 F_1 + E &= E, & F_1 + F_1 &= F_1, & F_1 \cap E &= F_1 \\
 \left. \begin{array}{l} F_1 \subset F_3 \\ \text{et} \\ F_2 \subset F_3 \end{array} \right\} &\implies F_1 + F_2 \subset F_3 & \left. \begin{array}{l} F_3 \subset F_1 \\ \text{et} \\ F_3 \subset F_2 \end{array} \right\} &\implies F_3 \subset F_1 \cap F_2.
 \end{aligned}$$

Définition 3.4 (Somme directe)

Soient E un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et on note $F_1 \oplus F_2$.

Proposition 3.3 (Caractérisation de la somme directe)

Pour que deux sous-espaces vectoriels soient en somme directe, il faut et il suffit que tout élément de la somme $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un autre de F_2 . C'est à dire,

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \iff \forall x \in F_1 + F_2, \exists! x_1 \in F_1 \text{ et } \exists! x_2 \in F_2 \\
 x = x_1 + x_2.$$

Définition 3.5 Soient E un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . F_1, F_2 sont dits supplémentaires dans E si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $F_1 + F_2 = E$.

Exemple 3.9 $\mathbb{k} = \mathbb{R}, E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2, F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}, F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$. F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E , supplémentaires dans E .

3.4 Dépendance, Indépendance linéaires

3.4.1 Combinaisons linéaires

Définition 3.6 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. $v_1, v_2, \dots, v_n \in E$. On appelle combinaison linéaires des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ tout vecteur v de E de la forme

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Proposition 3.4 (Autre caractérisation d'un s.e.v. par les combinaisons linéaires)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un sous ensemble de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) F \neq \emptyset \\ 2) \forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda x + \mu y) \in F. \\ (i.e. F \text{ est stable par combinaisons linéaires}). \end{array} \right.$$

3.4.2 Familles liées, familles libres

Définition 3.7 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v., $n \in \mathbb{N}^*$, $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in E^n$.

1) On dit que la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est libre si et seulement si $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ sont linéairement indépendants.

2) On dit que la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est liée si et seulement si $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} - \{0_{\mathbb{K}}\} : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_E$.

Exemple 3.10 1) Soient $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a : v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Car, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 =$

$0_{\mathbb{R}^3}$, montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \lambda_1 (1, 0, 1) + \lambda_2 (2, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\implies (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2) = (0, 0, 0)$$

$$\implies (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

2) Soient $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (2, 1)$, $v_3 = (-1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée. Car,

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$, on a :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2} \implies \lambda_1 (1, 1) + \lambda_2 (2, 1) + \lambda_3 (-1, 0) = (0, 0)$$

$$\implies (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0)$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_1 + 2(-\lambda_1) = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \end{cases}$$

donc, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ n'est pas toujours vérifié, prenons $\lambda_1 = 1$ on aura $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$v_1 - v_2 - v_3 = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2},$$

c'est à dire $v_1 = v_2 + v_3$.

Remarque 3.1 1) Pour que la famille $\{v\}$ soit liée il faut et il suffit que $v = 0_E$.

2) $\forall v \in E, \{v, v\}$ est liée $v - v = 0_E$.

3) Toute famille contenant 0_E est liée.

4) Si la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est liée alors tout v_i s'écrit comme combinaison linéaires des autres.

3.4.3 Sous-espace engendré par une partie

Définition 3.8 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $A \subset E$. On appelle s.e.v. engendré par A l'intersection de tous les s.e.v. de E contenant A et on le note $\langle A \rangle$ ou bien

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v.} \\ A \subset F}} F.$$

En d'autres termes, si $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

$$\langle A \rangle = \left\{ v \in E : \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right\}.$$

3.4.4 Familles génératrices, bases

Définition 3.9 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $G \subset E$. On dit que G est une famille génératrice de E si et seulement si $E = \langle G \rangle$, c'est à dire si $G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, on dit que G engendre E (ou G est une partie génératrice de E) si et seulement si

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Définition 3.10 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et B une partie de E .

On dit que B est une base de E si et seulement si B est à la fois, libre et génératrice de E .

C'est à dire, si on pose $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, alors B est une base de E si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Dans ce cas, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont appelés les coordonnées (ou bien les composantes) de x dans la base B .

La base canonique de $\mathbb{R}^2$

Définition 3.11 Soit $B = \{e_1, e_2\}$ où $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

B est dite la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Car :

a) B est libre, en effet : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \alpha (1, 0) + \beta (0, 1) = (0, 0)$$

$$(\alpha, \beta) = (0, 0)$$

$$\alpha = \beta = 0.$$

b) B engendre $\mathbb{R}^2$, en effet, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donc $\exists \lambda_1 = x \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = y \in \mathbb{R} :$

$$(x, y) = \lambda_1 (1, 0) + \lambda_2 (0, 1).$$

Donc, B engendre $\mathbb{R}^2$ de plus B est libre dans $\mathbb{R}^2$, alors B est une base de $\mathbb{R}^2$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.12 Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

B est dite base canonique de $\mathbb{R}^3$. Car :

a) B est libre, en effet : soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \alpha (1, 0, 0) + \beta (0, 1, 0) + \gamma (0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\implies (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\implies \alpha = 0, \beta = 0 \text{ et } \gamma = 0.$$

Donc, B est libre.

b) B engendre $\mathbb{R}^3$, en effet, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x, y, z) = \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (0, 0, 1).$$

On a :

$$(x, y, z) = x (1, 0, 0) + y (0, 1, 0) + z (0, 0, 1).$$

d'où, $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$ et $\lambda_3 = z$.

Donc, B engendre $\mathbb{R}^3$ de plus B est libre dans $\mathbb{R}^3$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.11 1) Montrer que $B = \{e_1, e_2\}$ où $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (2, 3)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1, 3, 2)$, $e_2 = (2, 1, -1)$, $e_3 = (1, -1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) Montrons que $B = \{e_1, e_2\}$ où $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (2, 3)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrons que B est libre : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on suppose que : $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$.

On a :

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \implies \alpha(1, 1) + \beta(2, 3) = (0, 0)$$

$$\implies (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta) = (0, 0)$$

$$\implies \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \dots\dots (1) \\ \alpha + 3\beta = 0 \dots\dots (2) \end{cases}.$$

de (2) - (1) on a : $\beta = 0$, (1) $\Rightarrow \alpha = -2\beta = 0$.

On conclut, $\alpha = \beta = 0$, d'où B est libre.

b) Montrons que B engendre $\mathbb{R}^2$: Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $(x, y) = \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(2, 3)$.

On a :

$$(x, y) = \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(2, 3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \dots\dots (1) \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = y \dots\dots (2) \end{cases}$$

De (2) - (1) on obtient : $\lambda_2 = y - x$, puis de (1) on aura : $\lambda_1 = x - 2\lambda_2 = 3x - 2y$.

On conclut : $\exists \lambda_1 = 3x - 2y \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = y - x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x, y) = (3x - 2y)(1, 1) + (y - x)(2, 3).$$

Donc, $B = \{e_1, e_2\}$ où $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (2, 3)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1, 3, 2)$, $e_2 = (2, 1, -1)$, $e_3 = (1, -1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrons que B est libre : Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que : $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

On a :

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1, 3, 2) + \beta(2, 1, -1) + \gamma(1, -1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha - \beta + \gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \dots\dots (1) \\ 3\alpha + \beta - \gamma = 0 \dots\dots (2) \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \dots\dots (3) \end{cases}$$

De (2) + (3) on obtient : $5\alpha = 0$ d'où $\alpha = 0$ et de ((1) + (2)) et ($\alpha = 0$) on obtient : $3\beta = 0$ d'où $\beta = 0$ et on aura aussi $\gamma = 0$. On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où B est libre.

b) Montrons que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1, 3, 2)$, $e_2 = (2, 1, -1)$, $e_3 = (1, -1, 1)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 3, 2) + \lambda_2(2, 1, -1) + \lambda_3(1, -1, 1).$$

$$\text{On a : } (x, y, z) = \lambda_1(1, 3, 2) + \lambda_2(2, 1, -1) + \lambda_3(1, -1, 1)$$

$$\text{d'où } (x, y, z) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = x \dots\dots (1) \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = y \dots\dots (2) \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = z \dots\dots (3) \end{cases}$$

$$\text{de (2) + (3) on a : } 5\lambda_1 = y + z \text{ d'où } \lambda_1 = \frac{y + z}{5}$$

$$\text{de (1) + (2) on a : } \lambda_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}\lambda_1$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z\right) = \frac{5x + y - 4z}{15}$$

de (1), on aura :

$$\lambda_3 = x - 2\lambda_2 - \lambda_1 = x - 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{15}y - \frac{4}{15}z\right) - \left(\frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z\right) = \frac{x - y + z}{3}$$

On conclut :

$$\exists \lambda_1 = \frac{y+z}{5} \in \mathbb{R}, \quad \exists \lambda_2 = \frac{5x+y-4z}{15} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \exists \lambda_3 = \frac{x-y+z}{3} \in \mathbb{R}$$

tel que :

$$(x, y, z) = \frac{y+z}{5}(1, 3, 2) + \frac{5x+y-4z}{15}(2, 1, -1) + \frac{x-y+z}{3}(1, -1, 1).$$

Donc, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1, 3, 2)$, $e_2 = (2, 1, -1)$, $e_3 = (1, -1, 1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.5 Soient F_1, F_2 deux familles de vecteurs de E telles que $F_1 \subset F_2$, alors on a

- a) Si F_2 est libre alors F_1 est libre.
- b) Si F_1 engendrent E alors F_2 engendrent E .

Proposition 3.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $F_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $F_2 = F_1 \cup \{v_{n+1}\} = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ deux s.e.v. de E , alors on a

- a) F_1 est libre et $v_{n+1} \notin \langle F_1 \rangle \implies F_2$ est libre.
- b) F_2 engendrent E et $v_{n+1} \in \langle F_1 \rangle \implies F_1$ engendrent E .

3.5 Théorie de la dimension

Définition 3.13 Soit E un $\mathbb{k}$ -e.v. On appelle dimension de E le cardinal d'une base B de E et on note $\dim E = \text{card} B$.

Exemple 3.12 a) $E = \mathbb{R}^n$, $B_{\mathbb{R}^n} = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

b) La famille $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $u_i \in \mathbb{R}^3$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$ car : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et $\text{card} L = 4$.

Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{k}$ -e.v. de dimension finie $\dim E = n$, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $L = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$, $r \leq n$ une famille libre de E . Alors il existe au moins une façon de compléter L par $(n - r)$ vecteurs de B pour obtenir une nouvelle base de E .

Exemple 3.13 $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $L = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1)\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On peut prendre $e_3 = (0, 0, 1)$ de B pour compléter L et avoir une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$. $L' = \{u_1, u_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.7 Soit E un $\mathbb{k}$ -e.v. de dimension finie $\dim E = n$. Alors

1. Toute famille libre admet au plus n éléments.
2. Toute famille génératrice admet au moins n éléments.
3. Toute base de E admet exactement n éléments.

Proposition 3.8 Soit E un $\mathbb{k}$ -e.v. de dimension finie $\dim E = n$ et soit F une famille finie d'éléments de E . On a :

1. Si $\text{card} F = n$ et F est libre, alors F est une base de E .
2. Si $\text{card} F = n$ et F est génératrice, alors F est une base de E .

Exercice 3.14 Soient $A = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ et $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

- 1) Montrer que A est une base de $\mathbb{R}^2$.
- 2) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) Montrons que $A = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On a $\text{card} A = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc il suffit de montrer que A est libre ou bien A est génératrice.

Montrons que $A = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ engendrent $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x, y) = \lambda_1 (2, 1) + \lambda_2 (-1, 1).$$

$$\text{On a : } (x, y) = \lambda_1 (2, 1) + \lambda_2 (-1, 1) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = x \dots\dots\dots (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

De (1) + (2) on a : $\lambda_1 = \frac{x+y}{3}$, et de (1) on obtient : $\lambda_2 = 2\lambda_1 - x = \frac{2y-x}{3}$.

On conclut : $\exists \lambda_1 = \frac{x+y}{3} \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = \frac{2y-x}{3} \in \mathbb{R}$, tel que :

$$(x, y) = \frac{x+y}{3} (2, 1) + \frac{2y-x}{3} (-1, 1).$$

Donc A est engendrer $\mathbb{R}^2$.

On a $\text{card}A = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ et A est engendré $\mathbb{R}^2$, alors A est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $\text{card}B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc il suffit de montrer que B est libre ou bien B est génératrice.

Montrons que $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

On a :

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \dots\dots (1) \\ \alpha + \gamma = 0 \dots\dots (2) \\ \beta + \gamma = 0 \dots\dots (3) \end{cases}$$

De (1) – (2) on obtient $\beta = \gamma$ et de (3) on a : $2\gamma = 0$, d'où $\gamma = \beta = 0$ et (1) $\Rightarrow \alpha = 0$.

On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où B est libre.

On a $\text{card}B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et B est libre dans $\mathbb{R}^3$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.9 Soit E un $\mathbb{k}$ -e.v. de dimension finie, alors tout s.e.v. F de E est de dimension finie et on a $\dim F \leq \dim E$.

Proposition 3.10 Soit F un s.e.v. de E avec $\dim E = n, \dim F = p$. Alors

1. F admet un supplémentaire dans E
2. Tout supplémentaire de F dans E est de dimension $n - p$.

Corollaire 3.15 Soient E un $\mathbb{k}$ -e.v. de dimension finie, F et G sont deux s.e.v. de E . Alors

$$\left. \begin{array}{l} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array} \right\} \Rightarrow F = G.$$

Preuve. $F \subset G \Rightarrow F$ admet un supplémentaire H dans G .

$\dim H = \dim G - \dim F = 0 \Rightarrow H = \{0_E\}$. Donc

$$G = F + H = F + \{0_E\} = F.$$

■

Théorème 3.16 (Formule de Grassmann)

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Pour tout F, G s.e.v. de E .

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Corollaire 3.17 Si F et G sont deux s.e.v. de E en somme directe. Alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 3.14 Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et F une famille d'éléments de E . On appelle rang de F et on note $\text{rg}F$ le nombre maximal de vecteurs de F qui sont linéairement indépendants.

Exemple 3.18 Soit $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

On a : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$, on aura : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

D'où les vecteurs de B qui sont linéairement indépendants, donc $\text{rg}B = 3$

Exemple 3.19 Soit $F = \{(1, 2), (1, 0), (1, -1)\}$ avec $v_1 = (1, 2), v_2 = (1, 0), v_3 = (1, -1)$.

remarquons que $v_1 = 3v_2 - 2v_3$ donc toute famille de 3 vecteurs est liée, on déduit que $\text{rg}F \leq 2$.

Mais, $\{v_2, v_3\}$ est libre, en effet : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha(1, 0) + \beta(1, -1) = (0, 0)$, on aura : $\alpha = \beta = 0$. Alors, $\text{rg}F = 2$.

3.6 Exercices

Exercice 3.20 1) On considère les vecteurs $v_1 = (1, -1, 2, 1), v_2 = (2, 1, 0, 1), v_3 = (3, 3, -2, 1)$, on note $E_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Déterminer une base de E_1 .

2) Soit

$$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\}.$$

Montrer que E_2 est s.e.v de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Solution.

1) $E_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ où $v_1 = (1, -1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$ et $v_3 = (3, 3, -2, 1)$.

Déterminons une base de E_1 :

Vérifions d'abord si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement indépendante dans $\mathbb{R}^4$:

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha(1, -1, 2, 1) + \beta(2, 1, 0, 1) + \gamma(3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

On a :

$$\alpha(1, -1, 2, 1) + \beta(2, 1, 0, 1) + \gamma(3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \dots\dots\dots (1) \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \dots\dots\dots (2) \\ 2\alpha - 2\gamma = 0 \dots\dots\dots (3) \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

On a : (3) $\Rightarrow \alpha = \gamma$, et (4) $\Rightarrow \beta = -\gamma - \alpha = -2\gamma$ on remplace les valeurs $\alpha = \gamma$ et $\beta = -2\gamma$ dans l'équation (2) on obtient $-\gamma - 2\gamma + 3\gamma = 0$ on aura $0 = 0$, le même résultat si on remplace $\alpha = \gamma$ et $\beta = -2\gamma$ dans l'équation (3)

On conclut, $\alpha = \gamma$, $\beta = -2\gamma$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, alors la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée dans $\mathbb{R}^4$.

Pour plus de détail voir l'exemple suivant, si on prend $\gamma = 1$ d'où $\alpha = 1$, $\beta = -2$ et

$$(1, -1, 2, 1) + (-2)(2, 1, 0, 1) + (3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Maintenant vérifions si $\{v_1, v_2\}$ est linéairement indépendante dans $\mathbb{R}^4$:

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha(1, -1, 2, 1) + \beta(2, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

On a :

$$\alpha(1, -1, 2, 1) + \beta(2, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc, la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

On a : $\{v_1, v_2\}$ engendre E_1 et libre, alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de E_1 et $\dim E_1 = 2$.

2) On a :

$$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\}.$$

Montrons que E_2 est s.e.v de $\mathbb{R}^4$ et en donnons une base.

E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si :

$$E_2 \neq \emptyset \text{ et } \forall X, Y \in E_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in E_2.$$

On a : $E_2 \neq \emptyset$, car $(0, 0, 0, 0) \in E_2$, puisque $0 - 0 + 0 - 2.0 = 0$ et $0 - 0 - 0 = 0$

Soient $X, Y \in E_2$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in E_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, x_1 - x_3 - x_4 = 0 \dots (1)$$

$$Y \in E_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \text{ et } y_1 - y_2 + y_3 - 2y_4 = 0, y_1 - y_3 - y_4 = 0 \dots (2)$$

$$\text{On a : } \lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta.(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3, \beta y_4)$$

$$= \left(\underbrace{\lambda x_1 + \beta y_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda x_2 + \beta y_2}_{z_2}, \underbrace{\lambda x_3 + \beta y_3}_{z_3}, \underbrace{\lambda x_4 + \beta y_4}_{z_4} \right)$$

De plus on a :

$$z_1 - z_2 + z_3 - 2z_4 = (\lambda x_1 + \beta y_1) - (\lambda x_2 + \beta y_2) + (\lambda x_3 + \beta y_3) - 2(\lambda x_4 + \beta y_4)$$

$$= \lambda(x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4) + \beta(y_1 - y_2 + y_3 - 2y_4) = \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

$$z_1 - z_3 - z_4 = (\lambda x_1 + \beta y_1) - (\lambda x_3 + \beta y_3) - (\lambda x_4 + \beta y_4)$$

$$= \lambda(x_1 - x_3 - x_4) + \beta(y_1 - y_3 - y_4) = \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in E_2$.

Donc, E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Donnons une base à $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\}$

Cherchons d'abord une famille génératrice à E_2 :

On a :

$$\begin{cases} x - y + z - 2t = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 3z \\ t = x - z \end{cases}$$

Soit

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in E_2 &\Rightarrow (x, y, z, t) = (x, -x + 3z, z, x - z) \\ &= (x, -x, 0, x) + (0, 3z, z, -z) \\ &= x(1, -1, 0, 1) + (0, 3, 1, -1) \end{aligned}$$

Alors, $E_2 = \langle w_1, w_2 \rangle$ où $w_1 = (1, -1, 0, 1)$, $w_2 = (0, 3, 1, -1)$

Vérifions si $\{w_1, w_2\}$ est linéairement indépendante dans $\mathbb{R}^4$:

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha(1, -1, 0, 1) + \beta(0, 3, 1, -1) = (0, 0, 0, 0)$$

On a :

$$\alpha(1, -1, 0, 1) + \beta(0, 3, 1, -1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \dots \dots \dots (1) \\ -\alpha + 3\beta = 0 \dots \dots \dots (2) \\ \beta = 0 \dots \dots \dots (3) \\ \alpha - \beta = 0 \dots \dots \dots (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

On conclut, $\alpha = \beta = 0$, d'où $\{w_1, w_2\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

On a : $\{w_1, w_2\}$ engendre E_2 et libre, alors $\{w_1, w_2\}$ est une base de E_2 et $\dim E_2 = 2$

Exercice 3.21 Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (1, -1, -2)$ engendrent le même s.e.v que : $w_1 = (3, 7, 0)$, $w_2 = (5, 0, -7)$.

Solution.

Montrons que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (1, -1, -2)$ engendrent le même s.e.v que : $w_1 = (3, 7, 0)$, $w_2 = (5, 0, -7)$.

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, on suppose que: $v_1 = (2, 3, -1) = \lambda(3, 7, 0) + \beta(5, 0, -7)$.

On a :

$$\lambda(3, 7, 0) + \beta(5, 0, -7) = (2, 3, -1) \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 5\beta = 2 \dots\dots\dots (1) \\ 7\lambda = 3 \dots\dots\dots (2) \\ -7\beta = -1 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

De (2) $\Rightarrow \lambda = \frac{3}{7}$ et (3) $\Rightarrow \beta = \frac{1}{7}$ et de (1) $\Rightarrow 3\left(\frac{3}{7}\right) + 5\left(\frac{1}{7}\right) = 2$, d'où
 $2 = 2$

donc,

$$v_1 = \left(\frac{3}{7}\right)(3, 7, 0) + \left(\frac{1}{7}\right)(5, 0, -7) \quad \text{et} \quad v_1 = \left(\frac{3}{7}\right)w_1 + \left(\frac{1}{7}\right)w_2$$

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, on suppose que: $v_2 = (1, -1, -2) = \lambda(3, 7, 0) + \beta(5, 0, -7)$.

On a :

$$\lambda(3, 7, 0) + \beta(5, 0, -7) = (1, -1, -2) \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 5\beta = 1 \dots\dots\dots (1) \\ 7\lambda = -1 \dots\dots\dots (2) \\ -7\beta = -2 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

de (2) $\Rightarrow \lambda = \frac{-1}{7}$ et (3) $\Rightarrow \beta = \frac{2}{7}$, remplaçons λ et β dans (1) on obtient :

$$(1) \Rightarrow 3\left(\frac{-1}{7}\right) + 5\left(\frac{2}{7}\right) = 1, \text{ d'où } 1 = 1.$$

Alors,,

$$v_2 = \left(\frac{-1}{7}\right)(3, 7, 0) + \left(\frac{2}{7}\right)(5, 0, -7)$$

$$v_2 = \left(\frac{-1}{7}\right)w_1 + \left(\frac{2}{7}\right)w_2$$

On a :

$$v_1 = \left(\frac{3}{7}\right)w_1 + \left(\frac{1}{7}\right)w_2$$

et

$$v_2 = \left(\frac{-1}{7}\right)w_1 + \left(\frac{2}{7}\right)w_2$$

On conclut, que les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (1, -1, -2)$ engendrent le même s.e.v que : $w_1 = (3, 7, 0)$, $w_2 = (5, 0, -7)$.

Exercice 3.22 Soit $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tel que $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 2, 1)$, $v_3 = (-1, 0, 3)$.

1) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Décomposer le vecteur $v = (16, -4, 4)$ dans cette base.

Solution.

1) Montrons que : $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tel que $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 2, 1)$, $v_3 = (-1, 0, 3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de Montrer que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad & \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0) \\ \Rightarrow & \begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \dots\dots\dots (2) \\ \beta + 3\gamma = 0 \dots\dots\dots (3) \end{cases} \end{aligned}$$

de (1) $\Rightarrow \gamma = \alpha$ et (2) $\Rightarrow \beta = -\alpha$

(3) $\Rightarrow -\alpha + 3\alpha = 0$, d'où $\alpha = 0$

On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où B est libre.

On a $\text{card} B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et B est libre dans $\mathbb{R}^3$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Décomposons le vecteur $v = (16, -4, 4)$ dans cette base B .

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$v = (16, -4, 4) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(-1, 0, 3).$$

On a :

$$\begin{aligned} (16, -4, 4) &= \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(-1, 0, 3) \\ &= (\alpha - \gamma, 2\alpha + 2\beta, \beta + 3\gamma) \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 16 \dots\dots (1) \\ 2\alpha + 2\beta = -4 \dots\dots (2) \\ \beta + 3\gamma = 4 \dots\dots (3) \end{cases}$$

de (1) $\Rightarrow \gamma = \alpha - 16$ et (2) $\Rightarrow \beta = -2 - \alpha$

(3) $\Rightarrow -2 - \alpha + 3(\alpha - 16) = 4$, d'où $2\alpha = 54$ donc, $\alpha = 27$, $\gamma = 27 - 16 = 11$ et $\beta = -2 - 27 = -29$

On conclut, $\alpha = 27, \beta = -29, \gamma = 11$, alors la décomposition de vecteur $v = (16, -4, 4)$ dans la base B est :

$$v = (16, -4, 4) = 27(1, 2, 0) - 29(0, 2, 1) + 11(-1, 0, 3).$$

Exercice 3.23 Etudier la liberté des familles suivantes :

$$1) \quad A = \{(1, 2, -1), (-1, 1, 2), (-1, 0, 3)\}$$

$$2) \quad B = \{(2, 0, -2), (3, 2, 1), (1, 2, 3)\}$$

$$3) \quad C = \{(1, -2, 1, 5), (1, 1, 1, 1), (-1, 0, 3, 0)\}$$

Solution.

1) Etudions la liberté des famille : $A = \{(1, 2, -1), (-1, 1, 2), (-1, 0, 3)\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(-1, 1, 2) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

$$\text{On a :} \quad \alpha(1, 2, -1) + \beta(-1, 1, 2) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 0 \dots\dots (1) \\ 2\alpha + \beta = 0 \dots\dots (2) \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \dots\dots (3) \end{cases}$$

On a : (2) $\Rightarrow \beta = -2\alpha$ et de (1) on aura $\gamma = \alpha - \beta = \alpha + 2\alpha$ d'où $\gamma = 3\alpha$, remplaçons β et γ dans l'équation (3) on obtient : (3) $\Rightarrow -\alpha - 4\alpha + 9\alpha = 0$, d'où $\alpha = 0$

On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où A est famille libre.

2) Etudions la liberté des famille : $B = \{(2, 0, -2), (3, 2, 1), (1, 2, 3)\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha(2, 0, -2) + \beta(3, 2, 1) + \gamma(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad & \alpha(2, 0, -2) + \beta(3, 2, 1) + \gamma(1, 2, 3) = (0, 0, 0) \\ \Rightarrow & \begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 2\beta + 2\gamma = 0 \dots\dots\dots (2) \\ -2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \dots\dots\dots (3) \end{cases} \end{aligned}$$

On a : (2) $\Rightarrow \gamma = -\beta$ et de (1) on aura $2\alpha + 3\beta - \beta = 0$ d'où $\alpha = -\beta$, remplaçons α et γ dans l'équation (3) on obtient : (3) $\Rightarrow 2\beta + \beta - 3\beta = 0$, d'où $0 \cdot \beta = 0$, on déduit que β il est quelconque. Prenons par exemple $\beta = 1$ on aura $\alpha = -1$ et $\gamma = -1$ c'est à dire

$$(-1)(2, 0, -2) + 1(3, 2, 1) + (-1)(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$$

On conclut, que la famille B est liée.

Exercice 3.24 Etudier la liberté des familles suivantes :

$$1) \quad A = \{e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x}\}$$

$$2) \quad B = \{2x^2 - 3, -x + 1, -x^4 - 3x^2 - 2x + 1\}$$

$$3) \quad C = \{x^2 + 1, x^3, x^3 + x^2 + 2\}$$

Solution.

3) Etudions la liberté de la famille : $A = \{e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x}\}$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$, on suppose que: $\alpha e^x + \beta x e^x + \gamma e^{-x} + \lambda x e^{-x} = 0$

Pour $x \neq 0$, on divise par $x e^x$ et en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha e^x + \beta x e^x + \gamma e^{-x} + \lambda x e^{-x}}{x e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha \frac{1}{x} + \beta + \gamma \frac{e^{-2x}}{x} + \lambda e^{-2x} \right) = \beta = 0$$

donc $\beta = 0$.

Pour $x \neq 0$, on divise par xe^{-x} et en faisant tendre x vers $-\infty$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha e^x + \gamma e^{-x} + \lambda x e^{-x}}{x e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\alpha \frac{e^{2x}}{x} + \gamma \frac{1}{x} + \lambda \right) = \lambda = 0$$

donc, $\lambda = 0$.

Prenons maintenant $x = 0$ et $x = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \dots\dots\dots (1) \\ \alpha e + \frac{1}{e} \gamma = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

On a : (1) $\Rightarrow \gamma = -\alpha$, remplaçons γ dans l'équation (2) on obtient : (2) $\Rightarrow \alpha \left(e - \frac{1}{e} \right) = 0$, d'où $\alpha = 0$ car $\left(e - \frac{1}{e} \right) \neq 0$. On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$, d'où $A = \{e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x}\}$ est famille libre.

2) Etudions la liberté de la famille : $B = \{2x^2 - 3, -x + 1, -x^4 - 3x^2 - 2x + 1\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que:

$$\alpha (2x^2 - 3) + \beta (-x + 1) + \gamma (-x^4 - 3x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad & \alpha (2x^2 - 3) + \beta (-x + 1) + \gamma (-x^4 - 3x^2 - 2x + 1) = 0 \\ \Rightarrow & -\gamma x^4 + (2\alpha - 3\gamma) x^2 + (-\beta - 2\gamma) x + (\beta - 3\alpha + \gamma) = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} -\gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \\ \beta - 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où $B = \{2x^2 - 3, -x + 1, -x^4 - 3x^2 - 2x + 1\}$ est famille libre.

3) Etudions la liberté de la famille : $C = \{x^2 + 1, x^3, x^3 + x^2 + 2\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que: $\alpha(x^2 + 1) + \beta x^3 + \gamma(x^3 + x^2 + 2) = 0$

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad & \alpha(x^2 + 1) + \beta x^3 + \gamma(x^3 + x^2 + 2) = 0 \\ \Rightarrow & (\beta + \gamma)x^3 + (\alpha + \gamma)x^2 + (\alpha + 2\gamma) = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots (1) \\ \alpha + \gamma = 0 \dots\dots\dots (2) \\ \alpha + 2\gamma = 0 \dots\dots\dots (3) \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

Donc, $C = \{x^2 + 1, x^3, x^3 + x^2 + 2\}$ est une famille libre.

Exercice 3.25 Dire si les ensembles de vecteurs suivants sont des espaces vectoriels, et justifier la réponse :

- 1) $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$
- 2) $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$
- 3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - 4z = 0\}$
- 4) $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ et } y - 3z = 0\}$
- 5) $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$
- 6) $F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$
- 7) $F_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = x + y + z - t = 3x + 2z = 1\}$

Solution.

1) $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
 F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$$F_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_1.$$

On a : $F_1 \neq \emptyset$, car $(0, 0) \in F_1$.

Soient $X, Y \in F_1$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_1 \Rightarrow X = (x_1, x_2) \text{ et } 2x_1 + 3x_2 = 0 \dots\dots (1)$$

$$Y \in F_1 \Rightarrow Y = (y_1, y_2) \text{ et } 2y_1 + 3y_2 = 0 \dots\dots (2)$$

$$\text{On a : } \lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2) + \beta.(y_1, y_2)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\beta y_1, \beta y_2)$$

$$= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2)$$

De plus on a :

$$2(\lambda x_1 + \beta y_1) + 3(\lambda x_2 + \beta y_2) = \lambda \underbrace{(2x_1 + 3x_2)}_{(1)} + \beta \underbrace{(2y_1 + 3y_2)}_{(2)}$$

$$= \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

On a : $\lambda.X + \beta.Y \in F_1$.

Alors, F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$$F_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_2.$$

On a : $F_2 \neq \emptyset$, car $(0, 0) \in F_2$.

Remarquons que : $X = (3, 0) \in F_2$ et $Y = (0, 5) \in F_2$

Mais on a : $X + Y = (3, 0) + (0, 5) = (3, 5) \notin F_2$.

Alors, $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - 4z = 0\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

F_3 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

$$F_3 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_3.$$

On a : $F_3 \neq \emptyset$, car $(0, 0, 0) \in F_3$, puisque $3.0 + 2.0 - 4.0 = 0$

Soient $X, Y \in F_3$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_3 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{et} \quad 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \dots (1)$$

$$Y \in F_3 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \quad \text{et} \quad 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 = 0 \dots (2)$$

On a :

$$\lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2, x_3) + \beta.(y_1, y_2, y_3)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$$

$$= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2, \lambda x_3 + \beta y_3)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
 & 3(\lambda x_1 + \beta y_1) + 2(\lambda x_2 + \beta y_2) - 4(\lambda x_3 + \beta y_3) \\
 &= \underbrace{\lambda(3x_1 + 2x_2 - 4x_3)}_{(1)} + \underbrace{\beta(3y_1 + 2y_2 - 4y_3)}_{(2)} \\
 &= \lambda.0 + \beta.0 = 0
 \end{aligned}$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_3$.

Donc, F_3 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4) $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ et } y - 3z = 0\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

F_4 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

$$F_4 \neq \emptyset \text{ et } \forall X, Y \in F_4, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_4.$$

On a : $F_4 \neq \emptyset$, car $(0, 0, 0) \in F_4$, puisque $0 + 0 = 0$ et $0 - 3.0 = 0$

Soient $X, Y \in F_4$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_4 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \text{ et } x_1 + x_2 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \dots (1)$$

$$Y \in F_4 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \text{ et } y_1 + y_2 = 0, y_2 - 3y_3 = 0 \dots (2)$$

$$\text{On a : } \lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2, x_3) + \beta.(y_1, y_2, y_3)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$$

$$= \left(\underbrace{\lambda x_1 + \beta y_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda x_2 + \beta y_2}_{z_2}, \underbrace{\lambda x_3 + \beta y_3}_{z_3} \right)$$

De plus on a :

$$z_1 + z_2 = \lambda x_1 + \beta y_1 + \lambda x_2 + \beta y_2$$

$$= \lambda(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) = \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

$$z_2 - 3z_3 = \lambda x_2 + \beta y_2 - 3(\lambda x_3 + \beta y_3)$$

$$= \lambda(x_2 - 3x_3) + \beta(y_2 - 3y_3) = \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_4$.

Donc, F_4 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5) $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

F_5 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

$$F_5 \neq \emptyset \text{ et } \forall X, Y \in F_5, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_5.$$

On a : $F_5 \neq \emptyset$, car $(0, 0, 0) \in F_5$, puisque $2.0 - 0 - 0 = 0$ et $0 - 2.0 - 0 = 0$
Soient $X, Y \in F_5$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_5 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \text{ et } 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \dots (1)$$

$$Y \in F_5 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \text{ et } 2y_1 - y_2 - y_3 = 0, y_1 - 2y_2 - y_3 = 0 \dots (2)$$

On a :

$$\lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2, x_3) + \beta.(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$$

$$= \left(\underbrace{\lambda x_1 + \beta y_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda x_2 + \beta y_2}_{z_2}, \underbrace{\lambda x_3 + \beta y_3}_{z_3} \right).$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} 2z_1 - z_2 - z_3 &= 2(\lambda x_1 + \beta y_1) - (\lambda x_2 + \beta y_2) - (\lambda x_3 + \beta y_3) \\ &= \lambda(2x_1 - x_2 - x_3) + \beta(2y_1 - y_2 - y_3) = \lambda.0 + \beta.0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - 2z_2 - z_3 &= (\lambda x_1 + \beta y_1) - 2(\lambda x_2 + \beta y_2) - (\lambda x_3 + \beta y_3) \\ &= \lambda(x_1 - 2x_2 - x_3) + \beta(y_1 - 2y_2 - y_3) = \lambda.0 + \beta.0 = 0. \end{aligned}$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_5$.

Donc, F_5 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

6) $F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

F_6 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$$F_6 \neq \emptyset \text{ et } \forall X, Y \in F_6, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_6.$$

On a : $F_6 \neq \emptyset$, car $(0, 0) \in F_6$.

Remarquons que : $X = (1, -1) \in F_6$ car $(1)^2 + (-1) = 0$
 et $Y = (-1, -1) \in F_6$ car $(-1)^2 + (-1) = 0$
 Mais on a : $X + Y = (1, -1) + (-1, -1) = (0, -2) \notin F_6$ car $(0)^2 + (-2) \neq 0$.
 Alors $F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

7) $F_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = x + y + z - t = 3x + 2z = 1\}$
 est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

F_7 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si :

$$F_7 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_7, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_7.$$

On a : $(0, 0, 0, 0) \notin F_7$.

Alors $F_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = x + y + z - t = 3x + 2z = 1\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3.7 Applications Linéaires

Définition 3.15 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si et seulement si

$$1. \forall x, y \in E : f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$2. \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Ceci est équivalent à dire

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

Terminologie et notations

Si $E = F$, l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ est dite **endomorphisme**.

Si f est bijective et linéaire de $E \rightarrow F$, elle est dite **isomorphisme**.

Si f est un endomorphisme bijectif alors c'est un **automorphisme**.

Remarque 3.2 Si f est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.

Exemple 3.26 Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (x + y, x - z, y + 2z) \end{aligned}$$

f est-il application linéaire ? c'est à dire :

$$(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y))?$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^3$, vérifions $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

$$x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow y = (y_1, y_2, y_3)$$

On a :

$$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3))$$

$$= f((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3))$$

$$= (\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 - \lambda x_3 - \mu y_3, \lambda x_2 + \mu y_2 + 2\lambda x_3 + 2\mu y_3)$$

$$= \lambda(x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_2 + 2x_3) + \mu(y_1 + y_2, y_1 - y_3, y_2 + 2y_3)$$

$$= \lambda f((x_1, x_2, x_3)) + \mu f((y_1, y_2, y_3)) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Alors, f est une application linéaire.

Exemple 3.27 Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto g(x, y) = (x + y, 2y - x, x - y + 1) \end{aligned}$$

g n'est pas linéaire car $g(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$.

Exemple 3.28 Soit

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto h(x, y) = |x - y| \end{aligned}$$

h n'est pas linéaire car $h(X + Y) \neq h(X) + h(Y)$.

Proposition 3.11 (Une autre caractérisation des applications linéaires)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f \in L(E, F)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in E^n$, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Remarque 3.3 Une application linéaire $f \in L(E, F)$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de E .

Exemple 3.29 Déterminer l'application linéaire f :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z), \end{aligned}$$

telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = f((1, 0, 0)) = (1, -1) \\ f(e_2) = f((0, 1, 0)) = (2, 3) \\ f(e_3) = f((0, 0, 1)) = (-1, 2) \end{array} \right.$$

($\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f((x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)) = f(x, 0, 0) + f(0, y, 0) + f(0, 0, z) \\ &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = x(1, -1) + y(2, 3) + z(-1, 2) \\ &= (x, -x) + (2y, 3y) + (-z, 2z) = (x + 2y - z, -x + 3y + 2z) \end{aligned}$$

Donc, l'application linéaire f est définie comme suit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + 2y - z, -x + 3y + 2z). \end{aligned}$$

3.7.1 Noyau, Image d'une application linéaire

Définition 3.16 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. On appelle image de f et on note $\text{Im } f$ l'ensemble défini par

$$\text{Im } f = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}.$$

2. On appelle noyau de f et on $\ker f$ l'ensemble défini par

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

Propriétés de $\text{Im } f$ et $\ker f$

Proposition 3.12 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. Pour tout s. e. v. E_1 de E l'image directe $f(E_1)$ est un s. e. v. de F ; en particulier $\text{Im } f$ est un s. e. v. de F .

2. Pour tout s. e. v. F_1 de F l'image réciproque $f^{-1}(F_1)$ est un s. e. v. de E ; en particulier $\ker f$ est un s. e. v. de E .

Preuve. 1. a) On a $0_E \in E_1$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E_1)$. Par suite $f(E_1) \neq \emptyset$.

b) Soient $y_1, y_2 \in f(E_1)$, donc $\exists x_1, x_2 \in E_1, y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= f(x_1) + f(x_2) \\ &= f(x_1 + x_2) \in f(E_1). \end{aligned}$$

c) Soient $y \in f(E_1), \lambda \in \mathbb{k}$, donc $\exists x \in E_1, y = f(x)$.

$$\begin{aligned} \lambda y &= \lambda f(x) \\ &= f(\lambda x) \in f(E_1). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f(E_1)$ est un s. e. v. de F .

2. a) On a $f^{-1}(F_1) \neq \emptyset$ car $f(0_E) = 0_F \in F_1$. Donc $0_E \in f^{-1}(F_1)$.

b) Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1)$

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1) &\implies f(x_1) \in F_1 \text{ et } f(x_2) \in F_1 \\ &\implies f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in F_1 \\ &\implies x_1 + x_2 \in f^{-1}(F_1) \end{aligned}$$

c) Soient $x \in f^{-1}(F_1)$ et $\lambda \in \mathbb{k}$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F_1) \text{ et } \lambda \in \mathbb{k} &\implies f(x) \in F_1 \text{ et } \lambda \in \mathbb{k} \\ &\implies \lambda f(x) = f(\lambda x) \in F_1 \\ &\implies \lambda x \in f^{-1}(F_1). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f^{-1}(F_1)$ est un s. e. v. de E . ■

Proposition 3.13 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$
2. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Preuve. 1. On suppose que f est injective et soit $x \in \ker f$

$$x \in \ker f \implies f(x) = 0_F = f(0_E)$$

$$\implies x = 0_E$$

$$\implies \ker f = \{0_E\}.$$

Réciproquement, on suppose $\ker f = \{0_E\}$. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2) \implies f(x_1) - f(x_2) = 0_F$$

$$\implies f(x_1 - x_2) = 0_F$$

$$\implies x_1 - x_2 \in \ker f$$

$$\implies x_1 - x_2 = 0_E$$

$$\implies x_1 = x_2$$

$$\implies f \text{ est injective.}$$

2. Nous avons f est surjective $\iff \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x) \in f(E)$, c'est à dire $F \subset f(E)$. On sait que $f(E) \subset F$, d'où $f(E) = F$. $\operatorname{Im} f = F$. ■

Exemple 3.30 Soit f est une application linéaire définie comme suit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (y, x - z, z) \end{aligned}$$

Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

On a :

$$\begin{aligned}\ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, x - z, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \text{ et } x - z = 0 \text{ et } z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}.\end{aligned}$$

d'où f est injective.

On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(y, x - z, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(0, 1, 0) + y(1, 0, 0) + z(0, -1, 1) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.\end{aligned}$$

Ce qui montre que les vecteurs $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ et $(0, -1, 1)$ engendrent $\operatorname{Im} f$.

Vérifions que $\{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$ est linéairement indépendant :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que: $\alpha(0, 1, 0) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(0, -1, 1) = (0, 0, 0)$

$$\text{On a : } \alpha(0, 1, 0) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(0, -1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \dots\dots (1) \\ \alpha - \gamma = 0 \dots (2) \\ \gamma = 0 \dots\dots (3) \end{array} \right.$$

de (1), (2) et (3) on a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où $\{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$ est libre.

on conclut que $\{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$ est libre et engendre $\operatorname{Im} f$, alors $\{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$. De plus on a :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3 \\ \text{et} \\ \dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.$$

D'où f est une application surjective.

3.7.2 Composition de deux applications linéaires

Soient E, F, G trois $\mathbb{k}$ -ev et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est une application linéaire. En effet ;

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ et $x, y \in E$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha x + \beta y) &= g(f(\alpha x + \beta y)) = g(\alpha f(x) + \beta f(y)) \\ &= \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) = \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y). \end{aligned}$$

Proposition 3.14 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si f est un isomorphisme de E sur F , alors f^{-1} est aussi un isomorphisme de F vers E .*

Preuve. Si f est bijective, alors f^{-1} est aussi bijective. Montrons que f^{-1} est linéaire. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ et $x', y' \in F$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha x' + \beta y') &= f^{-1}(\alpha f(f^{-1}(x')) + \beta f(f^{-1}(y'))) \\ &= f^{-1}(f[\alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y')]) = \alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y'). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Définition 3.17 *Deux $\mathbb{k}$ -ev E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\mathbb{k}$ -ev de E sur F ou bien de F sur E .*

Proposition 3.15 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ de dimensions finies. Pour que E et F soient isomorphes il faut et il suffit que $\dim E = \dim F$.*

3.7.3 Rang d'une application linéaire

Définition 3.18 *Soient E et F deux $\mathbb{k}$ -ev de dimensions finies et $f \in L(E, F)$. On appelle rang de f et on note $rg(f)$ l'entier naturel $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$.*

Remarque 3.4 1. Si B est une base de E , alors pour tout $f \in L(E, F)$, on a

$$rg(f) = \dim f(\langle B \rangle) = \dim \langle f(B) \rangle = rg(f(B)).$$

2. Pour tout $f \in L(E, F)$, on a

$$rg(f) \leq \min(\dim E, \dim F).$$

Théorème 3.31 (*Théorème du rang*)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies et $f \in L(E, F)$. Alors, on a

$$\text{rg}(f) = \dim E - \dim \ker f.$$

Proposition 3.16 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies et $f \in L(E, F)$.

Alors

1. f est injective si et seulement si $\dim(\text{Im } f) = \dim E$
2. f est surjective si et seulement si $\dim(\text{Im } f) = \dim F$.

Corollaire 3.32 Sur $\mathbb{R}$, on considère les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ et $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors

1. $n < p \implies f$ n'est pas surjective.
2. $n > p \implies f$ n'est pas injective.
3. $n = p$, on ne peut rien dire mais

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Preuve. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Im } f + \dim \ker f.$$

1. Supposons par l'absurde que $n < p$ et f est surjective, alors $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^p = p$. Ce qui implique, $n = p + \dim \ker f$ et $n < p$, contradiction. Donc, f n'est pas surjective.

2. On suppose de même que f est injective et $n > p$. donc $\dim \ker f = 0$. Ce qui implique, $n = 0 + \dim \text{Im } f$ et $\dim \text{Im } f \leq p \implies n \leq p$, contradiction. Donc, f n'est pas injective.

3. Si $n = p$, on obtient $n = \dim \text{Im } f + \dim \ker f$ et on ne peut rien dire.

Si de plus, par exemple, f est injective, alors $\dim \ker f = 0$. Ce qui nous donne, $n = \dim \text{Im } f$ et comme $n = p$, on déduit que f est surjective. Par suite, f est bijective.

Raisonnement analogue si f est surjective. ■

3.8 Exercices

Exercice 3.33 Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + 3y, 2x - z) \end{aligned}$$

- 1) Vérifier que f est une application linéaire.
- 2) Déterminer $\ker f$ le noyau de f , puis donner $\dim \ker f$.
- 3) f est-elle injective ?
- 4) Donner $\dim \operatorname{Im} f$, puis donner une base à $\operatorname{Im} f$.
- 5) f est-elle surjective ?

Solution.

- 1) Vérifions que f est une application linéaire.

Soient $X = (x, y, z), Y = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda X + \mu Y) &= f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) \\
 &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\
 &= (\lambda x + \mu x' + 3\lambda y + 3\mu y', 2\lambda x + 2\mu x' - \lambda z - \mu z') \\
 &= \lambda(x + 3y, 2x - z) + \mu(x' + 3y', 2x' - z') \\
 &= \lambda f((x, y, z)) + \mu f((x', y', z')) = \lambda f(X) + \mu f(Y).
 \end{aligned}$$

Donc, f est une application linéaire.

- 2) Déterminons $\ker f$ le noyau de f , puis nous donnons $\dim \ker f$.

On a :

$$\begin{aligned}
 \ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 3y, 2x - z) = (0, 0)\} \\
 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -\frac{1}{3}x \text{ et } z = 2x \right\} \\
 &= \left\{ x \left(1, -\frac{1}{3}, 2 \right) : x \in \mathbb{R} \right\},
 \end{aligned}$$

d'où le vecteur $\left(1, -\frac{1}{3}, 2 \right)$ engendre $\ker f$ de plus le vecteur $\left(1, -\frac{1}{3}, 2 \right)$ est libre

car il n'est pas nul en déduit que $\left\{ \left(1, -\frac{1}{3}, 2 \right) \right\}$ de $\ker f$, donc $\dim \ker f = 1$.

- 3) f n'est pas injective car on a : $\ker f \neq (0, 0, 0)$.

- 4) Donnons $\dim \operatorname{Im} f$

On a : $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, on déduit que : $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Nous donnons une base à $\operatorname{Im} f$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{et} \\ \dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{array} \right\} \implies \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2,$$

donc $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est base de $\operatorname{Im} f$.

5) f est surjective car : $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.34 Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (x + 2z, y + z, 3x + 2z) \end{aligned}$$

1) Montrer que f est linéaire.

2) Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ en précisant leurs dimensions.

3) f est-elle bijective ? Justifier.

Solution.

On a

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2z, y + z, 3x + 2z).$$

1) Montrons que f est linéaire

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha z_1 + \beta z_2), \alpha y_1 + \beta y_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2), 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2)) \\ &= (\alpha(x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2), \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2), \alpha(3x_1 + 2z_1) + \beta(3x_2 + 2z_2)) \\ &= \alpha(x_1 + 2z_1, y_1 + z_1, 3x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2, y_2 + z_2, 3x_2 + 2z_2) \\ &= \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) = \alpha f(X) + \beta f(Y). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2)

$$\begin{aligned}
\text{Ker } f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 2z, y + z, 3x + 2z) = (0, 0, 0)\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0 \text{ et } y + z = 0 \text{ et } 3x + 2z = 0\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ et } z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}.
\end{aligned}$$

$$\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \implies \dim \text{Ker } f = 0.$$

$$\begin{aligned}
\text{Im } f &= \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{(x + 2z, y + z, 3x + 2z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{x(1, 0, 3) + y(0, 1, 0) + z(2, 1, 2) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \left\langle \underbrace{(1, 0, 3)}_{u_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{u_2}, \underbrace{(2, 1, 2)}_{u_3} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ engendre $\text{Im } f$. Montrons que cette famille est libre

$$\text{Soient } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(2, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}
&\implies (\alpha + 2\gamma, \beta + \gamma, 3\alpha + 2\gamma) = (0, 0, 0) \\
&\implies \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 & \dots\dots\dots(1) \\ \beta + \gamma = 0 & \dots\dots\dots(2) \\ 3\alpha + 2\gamma = 0 & \dots\dots\dots(3) \end{cases}
\end{aligned}$$

(3)-(1) donne $2\alpha = 0$ et donc $\alpha = 0$. On remplace α dans (1), on aura $\gamma = 0$.

On remplace γ dans (2), on aura $\beta = 0$. Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

Finalement $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\text{Im } f$ et par suite $\dim \text{Im } f = 3$.

3) $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \implies f$ est injective

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } f \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim \text{Im } f = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \implies \text{Im } f = \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espace d'arrivée}} \implies f \text{ est surjective.}$$

Finalement f est bijective.