

1.1 Introduction

Les lois de la physique et de la mécanique ainsi que de nombreux phénomènes chimiques, biologiques ou économiques se ramènent à la recherche de fonctions dont les dérivées vérifient certaines relations.

1.1.1 Un exemple en Physique

Considérons l'exemple d'un mobile glissant sur un plan incliné avec frottements. Il s'agit d'appliquer le principe fondamental de la Dynamique. Voici le schéma correspondant à cette situation : On peut écrire, d'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Les forces mises en jeu sont $\vec{P}$, le poids du mobile, $\vec{R}$ la réaction au support et $\vec{f}$, la force de frottement telle que $\vec{f} = -\beta\vec{v}$, avec $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Projurons sur l'axe du mouvement, on obtient :

$$mg \sin \alpha - \beta v = m \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v = g \sin \alpha.$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. La plupart des situations en Physique peuvent se modéliser à l'aide d'équations différentielles. Évidemment, plus le modèle est sophistiqué, plus les équations différentielles seront compliquées à résoudre.

1.2 Généralités

Définition 1.1 On appelle "équation différentielle" toute équation dans laquelle figurent une fonction inconnue y d'une variable x et ses dérivées de différents ordres

$$F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0, \quad (1.1)$$

où F est une relations liant x à la fonction y et ses dérivés $y', \dots, y^{(k)}$.

On appelle "**ordre**" de l'équation différentielle, l'ordre de la dérivée la plus élevée, figurant dans l'équation.

Une telle équation différentielle (1.1) est dite équation différentielle ordinaire (EDO).

Exemple 1.1 $y'' + (y')^3 + 2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

$y' + xy + \frac{x}{x+1} = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1.

$x^2y'' + xy' + 2y^4 = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

$xy''' + 2y + xe^x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 3.

$y''' + 2y^{(8)} = xe^xy'$ est une équation différentielle d'ordre 8.

Définition 1.2 On appelle "solution" (ou intégrale) de l'équation différentielle (1.1) tout couple (I, f) formé d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction f , vérifiant les conditions suivantes :

1) f est k -fois dérivable sur I .

2) $\forall x \in I, F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(k)}(x)) = 0$.

Si f est une solution de l'équation différentielle (1.1), alors le graphe de f est appelé courbe intégrale de cette équation.

Définition 1.3 Si la seule solution prolongeant f , est f elle-même, on dira alors que f est une "solution maximale".

Exemple 1.2 $y = e^x$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - y = 0$. ($y = e^x$ est une solution maximale).

Remarque 1.1 Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent.

1.3 Equations différentielles du premier ordre

Définition 1.4 La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est :

$$F(x, y, y') = 0,$$

où F est une relations liant x à la fonction y et sa dérivée y' .

Le plus souvent, les équations différentielles du premier ordre sont étudiées sous leurs formes résolues en $y' = f(x, y)$, où $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 1.3 $xy' + 2y^4 + \ln x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1.

$xy' + 2y + xe^x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1.

$x(y')^3 + 2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1.

$y' = xy^3 + \frac{x}{x+1}$ est une équation différentielle d'ordre 1.

Problème de Cauchy : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

relatif à l'équation $y' = f(x, y)$ et à la condition $y_0 = y(x_0)$, $x_0 \in I$, consiste à chercher la solution maximale de l'équation $y' = f(x, y)$ telle que $y_0 = y(x_0)$.

1.3.1 Equations différentielles à variables séparées

Définition 1.5 On appelle "équation différentielle à variables séparées" toute équation de la forme :

$$f(y) y' = g(x),$$

où f et g sont deux fonctions réelles définies et continues respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

On a : $y' = \frac{dy}{dx}$, donc l'équation peut s'écrire aussi comme :

$$f(y) dy = g(x) dx.$$

Résolution d'une équations différentielles à variables séparées :

Une telle équation différentielle à variables séparées se résout par calcul de primitives de f et g comme suit :

On a :

$$\begin{aligned} f(y) y' = g(x) &\implies f(y) dy = g(x) dx \\ &\implies \int f(y) dy = \int g(x) dx \\ &\implies F(y) = G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

où F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur J .

Enfin, on va résoudre cette équation (algébrique) : $F(y) = G(x) + c$ de l'inconnu y .

Voici des exemples concrets :

Exemple 1.4 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy' + e^y = 0. \tag{1.2}$$

On commence par séparer les variables : x d'un côté et y de l'autre côté.

On a :

$$\begin{aligned}
 (1.2) & \Rightarrow xy' = -e^y, \\
 & \Rightarrow x \frac{dy}{dx} = -e^y, \\
 & \Rightarrow -e^{-y} dy = \frac{1}{x} dx, \text{ (en supposant } x \neq 0), \\
 & \Rightarrow \int (-e^{-y}) dy = \int \frac{1}{x} dx, \\
 & \Rightarrow e^{-y} = \ln |x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\
 & \Rightarrow -y = \ln(\ln |x| + c), \quad c \in \mathbb{R} \text{ (en supposant } \ln |x| + c > 0), \\
 & \Rightarrow y(x) = -\ln(\ln |x| + c), \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$y(x) = -\ln(\ln |x| + c) \text{ où } c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle (1.2).

Exemple 1.5 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2) y' - xy = 0. \quad (1.3)$$

On a : $y = 0$ est une solution triviale (évidente) de (1.3). On suppose que $y \neq 0$, et on commence par séparer les variables : x d'un côté et y de l'autre côté.

On a :

$$\begin{aligned}
 (1.3) & \Rightarrow (1 + x^2) \frac{dy}{dx} = xy, \\
 & \Rightarrow (1 + x^2) dy = xy dx, \\
 & \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{1 + x^2} dx, \\
 & \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1 + x^2} dx, \\
 & \Rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c / c \in \mathbb{R}, \\
 & \Rightarrow |y| = e^{\ln \sqrt{1+x^2} + \ln k} / k \in \mathbb{R}, \text{ où } (c = \ln k), \\
 & \Rightarrow |y| = e^{\ln(k\sqrt{1+x^2})} / k \in \mathbb{R}, \\
 & \Rightarrow |y| = k\sqrt{1+x^2} / k \in \mathbb{R}, \\
 & \Rightarrow y = \pm k\sqrt{1+x^2} / k \in \mathbb{R}, \\
 & \Rightarrow y = \lambda\sqrt{1+x^2} / \lambda \in \mathbb{R}, \text{ où } (\lambda = \pm k).
 \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de l'équation (1.3) sont :

$$y(x) = \lambda \sqrt{1+x^2} / \lambda \in \mathbb{R}.$$

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

1.3.2 Equations différentielles homogènes en x et y.

Définition 1.6 On appelle "équations différentielles homogènes en x et y" toute équation de la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résolution d'une équations différentielles homogènes :

On utilise ce changement d'inconnue $u = \frac{y}{x}$ ($y = xu$) qui donne $y' = u + xu'$.

Par suite on a :

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu' = f(u), \\ \Rightarrow x \frac{du}{dx} &= f(u) - u, \quad (u' = \frac{du}{dx}), \\ \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} &= \frac{dx}{x}, \\ \Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} &= \int \frac{dx}{x}, \\ \Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} &= \ln|x| + c / c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On détermine u puis y , on obtient la solution générale grâce à la relation $y = xu$.

Voici des exemples concrets :

Exemple 1.6 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xyy' - y^2 + x^2 = 0. \quad (1.4)$$

Si on suppose que $xy \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} (1.4) \Rightarrow y' &= \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \\ \Rightarrow y' &= \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}, \end{aligned}$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ qui donne $y' = u + xu'$, on remplace dans (1.4)

$$\begin{aligned}
 (1.4) \Rightarrow u + xu' &= u - \frac{1}{u}, \\
 \Rightarrow x \frac{du}{dx} &= -\frac{1}{u}, \\
 \Rightarrow u du &= -\frac{dx}{x}, \\
 \Rightarrow \int u du &= \int -\frac{dx}{x}, \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 &= -\ln|x| + c/ \quad c \in \mathbb{R}, \\
 \Rightarrow u &= \pm \sqrt{-2 \ln|x| + 2c/} \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Mais : $y = xu$, d'où

$$y(x) = \pm x \sqrt{-2 \ln|x| + 2c/} \quad c \in \mathbb{R},$$

c'est la solution générale de l'équation différentielle (1.4).

Exemple 1.7 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y' - xy + y^2 = 0. \quad (1.5)$$

Si on suppose que $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 (1.5) \Rightarrow y' &= \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}, \\
 \Rightarrow y' &= \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2,
 \end{aligned}$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ qui donne $y' = u + xu'$, on

remplace dans (1.5) :

$$\begin{aligned}
 (1.5) &\Rightarrow u + xu' = u - u^2, \\
 &\Rightarrow x \frac{du}{dx} = -u^2, \\
 &\Rightarrow \frac{-du}{u^2} = \frac{dx}{x}, \\
 &\Rightarrow \int \frac{-du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}, \\
 &\Rightarrow \frac{1}{u} = \ln |x| + c / c \in \mathbb{R}, \\
 &\Rightarrow u = \frac{1}{c + \ln |x|} / c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Mais : $y = xu$, d'où, $y(x) = \frac{x}{c + \ln |x|} / c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de l'équation différentielle (1.5).

1.3.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1.7 On appelle "équation différentielle linéaire du premier ordre" toute équation de la forme :

$$y' = a(x)y + b(x), \quad (1.6)$$

où a et b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On lui associe l'équation sans second membre :

$$y' = a(x)y. \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) est dite équation différentielle homogène associée à l'équation (1.6) (ou l'équation sans second membre).

Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

a) Résolution de l'équation homogène (1.7) :

Soit l'équation (1.7)

$$y' = a(x)y.$$

Si $y \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 (1.7) \quad &\Rightarrow \frac{dy}{y} = a(x)dx, \\
 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx, \\
 &\Rightarrow \ln |y| = \int a(x)dx + k / k \in \mathbb{R}, \\
 &\Rightarrow |y| = \exp \left(\int a(x)dx + k \right) / k \in \mathbb{R}, \\
 &\Rightarrow y = c \exp \left(\int a(x)dx \right) / c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

D'où, $y_h(x) = c \exp \left(\int a(x)dx \right) / c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de (1.7).

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 1.1 *La solution générale y de (1.6) est la somme de la solution générale y_h de (1.7) et d'une solution particulière de (1.6).*

$$y = y_p + y_h = y_p + c \exp \left(\int a(x)dx \right) / c \in \mathbb{R}.$$

b) Recherche d'une solution particulière (Méthode de la variation de la constante) :

C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitives.

On a : $y_h(x) = c \exp \left(\int a(x)dx \right) / c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de (1.7) avec c une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = c(x) \exp \left(\int a(x)dx \right)$, où c est maintenant une fonction de la variable x à déterminer.

On pose :

$$y(x) = c(x) \exp \left(\int a(x)dx \right),$$

donc,

$$y'(x) = c'(x) \exp \left(\int a(x)dx \right) + a(x)c(x) \exp \left(\int a(x)dx \right)$$

En remplaçant y et y' dans (1.6) on obtient :

$$\begin{aligned} c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) &= a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + b(x) \\ \Rightarrow c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) &= b(x) \\ \Rightarrow c'(x) &= b(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right), \end{aligned}$$

par conséquent

$$c(x) = \int \left(b(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right) \right) dx + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement la solution générale de (1.6) est

$$y(x) = \left(\int \left(b(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right) \right) dx + \lambda \right) \exp\left(\int a(x)dx\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.8 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' = 3y + 1 - 2e^x, \quad (1.8)$$

puis résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = 3y + 1 - 2e^x, \\ y(0) = 2. \end{cases} \quad (1.9)$$

L'équation homogène associée est

$$y' = 3y \quad (1.10)$$

Remarquons que : $y = 0$ est une solution évidente de (1.84).

On suppose que $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = 3 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3dx, \\ &\Rightarrow \ln|y| = 3x + k, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = \pm e^k e^{3x}, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = ce^{3x}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (c = \pm e^k). \end{aligned}$$

Alors,

$$y_h(x) = ce^{3x}, \quad c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.84).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y(x) = c(x) e^{3x} \Rightarrow y'(x) = c'(x) e^{3x} + 3c(x) e^{3x}$. En remplaçant y et y' dans (1.83) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.83) \quad &\Rightarrow c'(x) e^{3x} + 3c(x) e^{3x} = 3c(x) e^{3x} + 1 - 2e^x, \\ &\Rightarrow c'(x) e^{3x} = 1 - 2e^x, \\ &\Rightarrow c'(x) = e^{-3x} - 2e^{-2x}, \\ &\Rightarrow c(x) = \frac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \left(\frac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda \right) e^{3x} = \frac{-1}{3} + e^x + \lambda e^{3x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$y(x) = \lambda e^{3x} + e^x - \frac{1}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.83).

Pour le problème de Cauchy (1.9) on a :

$$\begin{aligned} y(0) = 2 \quad &\Rightarrow \lambda + 1 - \frac{1}{3} = 2, \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Donc,

$$y(x) = \frac{4}{3}e^{3x} + e^x - \frac{1}{3},$$

est la solution du problème de Cauchy (1.9).

1.3.4 Equation différentielle de Bernoulli

Définition 1.8 On appelle "équation différentielle de Bernoulli" toute équation de la forme :

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0. \quad (1.11)$$

où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ et a, b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2 On sait déjà traiter les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, car (1.11) est alors une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli (1.11), on divise par y^α

$$(1.11) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^\alpha} + a(x) \left(\frac{y}{y^\alpha} \right) + b(x) = 0,$$

puis on pose : $z = \frac{y}{y^\alpha} = y^{1-\alpha}$ comme un changement de variable, et par conséquent : $z' = (1 - \alpha) y^{-\alpha} y'$ d'où $y' = \frac{y^\alpha}{1 - \alpha} z'$. En remplaçant y et y' dans (1.11) on obtient :

$$(1.11) \Leftrightarrow \frac{z'}{1 - \alpha} + a(x)z + b(x) = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z .

Exemple 1.9 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy' + y + x^2y^2 = 0. \quad (1.12)$$

Cette équation (1.12) est de Bernoulli.

$$(1.12) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{y} \right) + x = 0, \text{ pour } xy \neq 0$$

En posant $z = \frac{1}{y}$, on aura : $z' = -\frac{1}{y^2} y' \Rightarrow y' = -y^2 z'$. En remplaçant y et y' dans (1.12) on obtient :

$$z' = \frac{1}{x} z + x, \quad (1.13)$$

l'équation (1.13) est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z .

L'équation homogène associée à (1.13) est

$$z' = \frac{1}{x} z. \quad (1.14)$$

Résolution de l'équation (1.14) :

$$\begin{aligned} (1.14) &\Rightarrow \frac{z'}{z} = \frac{1}{x}, \\ &\Rightarrow \ln |z| = \ln |x| + k, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow |z| = e^{\ln|x|+k}, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = \pm e^k x, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = cx, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$z_h(x) = cx, \quad c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.14).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $z(x) = c(x)x$, donc : $z'(x) = c'(x)x + c(x)$. En remplaçant z et z' dans (1.13), on obtient :

$$\begin{aligned} (1.13) \quad &\Rightarrow c'(x) = 1, \\ &\Rightarrow c(x) = \int 1 dx, \\ &\Rightarrow c(x) = x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où,

$$z(x) = x(x + \lambda), \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.13).

Par conséquent : $z = \frac{1}{y} = x(x + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire :

$$y(x) = \frac{1}{x(x + \lambda)} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (1.12).

1.3.5 Equation de Riccati

Définition 1.9 On appelle "équation différentielle de Riccati" toute équation de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad (1.15)$$

où a, b et c sont trois fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Mais si une solution particulière y_p pouvait être trouvée, on pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant le changement de variable : $y = y_p + z$, donc $y' = y'_p + z'$, En remplaçant y et y' dans (1.15) on obtient :

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow y'_p + z' = a(x)(y_p + z)^2 + b(x)(y_p + z) + c(x), \\ &\Leftrightarrow y'_p + z' = a(x)y_p^2 + 2a(x)y_pz + a(x)z^2 + b(x)y_p + b(x)z + c(x), \\ &\Leftrightarrow y'_p + z' = a(x)(y_p^2 + 2y_pz + z^2) + b(x)(y_p + z) + c(x), \\ &\Leftrightarrow [y'_p - (a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x))] + z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2, \\ \text{on a} \quad &: y'_p - (a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)) = 0 \text{ car } y_p \text{ est une solution (1.15).} \end{aligned}$$

Donc on aura :

$$z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2,$$

qui est une équation de Bernoulli, comme on l'a vu plus haut.

Exemple 1.10 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' = -y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}. \quad (1.16)$$

(Indication : $y_p = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (1.16)).

On a : (1.16) est une équation différentielle de Riccati. Donc on pose le changement de variable : $y = \frac{1}{x} + z$, alors : $y' = -\frac{1}{x^2} + z'$, En remplaçant y et y' dans (1.16) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.16) \quad &\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} + z' = -\left(\frac{1}{x} + z\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + z\right) - \frac{1}{x^2}, \\ &\Leftrightarrow z' + \frac{1}{x}z + z^2 = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{z}\right) + 1 = 0, \quad (1.17)$$

l'équation (1.17) est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

En posant $u = \frac{1}{z}$, on aura $u' = -\frac{1}{z^2}z'$, d'où $z' = -z^2u'$. En remplaçant z et z' dans (1.17) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.17) \quad &\Leftrightarrow -\frac{z^2u'}{z^2} + \frac{1}{x}u + 1 = 0, \\ &\Leftrightarrow -u' + \frac{1}{x}u + 1 = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$u' = \frac{1}{x}u + 1, \quad (1.18)$$

l'équation (1.18) est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue u .

L'équation homogène associée à (1.18) est

$$u' = \frac{1}{x}u. \quad (1.19)$$

On a :

$$\begin{aligned} (1.19) \quad &\Rightarrow u' = \frac{1}{x}u, \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{x}dx, \quad (u' = \frac{du}{dx}), \\ &\Rightarrow \ln|u| = \ln|x| + k \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow |u| = e^{\ln|x|+k} \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow |u| = e^k |x| \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow u = cx, \quad c \in \mathbb{R} \quad (c = \pm e^k). \end{aligned}$$

Alors

$$u(x) = c(x)x, \quad c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.19).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $u(x) = xc(x)$, donc : $u'(x) = c'(x)x + c(x)$. En remplaçant u et u' dans (1.18) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.18) \quad &\Rightarrow c'(x)x + c(x) = \frac{1}{x}xc(x) + 1, \\ &\Rightarrow c'(x)x = 1, \\ &\Rightarrow c(x) = \int \frac{1}{x} dx, \\ &\Rightarrow c(x) = \ln|x| + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$u(x) = x \ln|x| + \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$u(x) = x \ln|x| + \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.18).

On a $u = \frac{1}{z}$, donc $z = \frac{1}{u}$, d'où

$$z = \frac{1}{x \ln|x| + \lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.17).

Mais, $y = \frac{1}{x} + z$, donc

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln|x| + \lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.16).

1.4 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette partie, on s'intéressera à la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Définition 1.10 On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* toute équation de la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad (1.20)$$

où a, b sont deux constantes réelles et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. On lui associe l'équation sans second membre :

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (1.21)$$

Problème de Cauchy :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \text{ où } x_0 \in I, \\ y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

relatif à l'équation (1.20) et aux deux conditions $y_0 = y(x_0)$ et $y'_0 = y'(x_0)$, $x_0 \in I$ consiste à chercher la solution maximale de l'équation (1.20) telle que : $y_0 = y(x_0)$ et $z_0 = y'(x_0)$.

1.4.1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée

On cherche des solutions du type $y = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $y = e^{rx}$, alors $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$ en remplace dans (1.21) on obtient :

$$(r^2 + ar + b)e^{rx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a l'équation suivante :

$$r^2 + ar + b = 0. \quad (1.22)$$

L'équation (1.22) est appelée "équation caractéristique" de l'équation différentielle (1.20).

Dans l'étude de l'équation caractéristique (1.22), trois cas peuvent se présenter selon le signe de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

Premier cas : Si $\Delta > 0$, l'équation (1.22) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors la solution générale de (1.21) est de la forme

$$y_0 = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Deuxième cas : Si $\Delta = 0$, l'équation (1.22) admet une racine réelle double r , alors la solution générale de (1.21) est de la forme

$$y_0 = (A + Bx) e^{rx},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Troisième cas : Si $\Delta < 0$, l'équation (1.22) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors la solution générale de (1.21) est de la forme

$$y_0 = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Exemple 1.11 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (1.23)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de (1.23) est

$$y_0 = Ae^x + Be^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.12 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 10y' + 25y = 0 \quad (1.24)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 10r + 25 = 0,$$

cette équation admet la racine réelle double $r = 5$. Ainsi, la solution générale de (1.24) est

$$y_0 = (A + Bx) e^{5x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.13 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 9y = 0. \quad (1.25)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0,$$

cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$.

Ainsi, la solution générale de (1.25) est

$$\begin{aligned} y_0 &= (A \cos 3x + B \sin 3x) e^{0x}, \\ &= A \cos 3x + B \sin 3x, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.4.2 Résolution de l'équation linéaire non homogène

Théorème 1.14 La solution générale maximale Y de l'équation linéaire non homogène (1.20) est la somme d'une solution maximale particulière y_p de l'équation (1.20) et de la solution générale y de l'équation homogène associée (1.21) c'est à dire :

$$Y = y + y_p,$$

où y est la solution générale de l'équation homogène associée (1.21),
et y_p est une solution particulière de l'équation avec second membre (1.20).

Recherche de la solution particulière y_p de (1.20)

- Cas le second membre est du type $e^{\alpha x} P(x)$:

Si $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = x^m e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P et m la multiplicité de solution α dans l'équation caractéristique (1.22), c'est à dire :

- On pose : $y_p = e^{\alpha x} Q(x)$, ($m = 0$), si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.22).
- On pose : $y_p = x e^{\alpha x} Q(x)$, ($m = 1$), si α est une racine simple de l'équation caractéristique (1.22).
- On pose : $y_p = x^2 e^{\alpha x} Q(x)$, ($m = 2$), si α est une racine double de l'équation caractéristique (1.22).

Exemple 1.15 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1. \quad (1.26)$$

Puis résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} 2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 4. \end{cases} \quad (1.27)$$

On a :

$$(1.26) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0,$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} = 0. \quad (1.28)$$

On a : $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$, les racines de l'équation (1.28) sont : $r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = 1$. Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.21) est

$$y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} + Be^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (1.26) :

On a :

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2} = \left(-\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}\right)e^{0x}.$$

Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.28), donc on cherche la solution particulière de (1.26) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{0x} = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, alors

$$y_p'(x) = c + 2bx + 3ax^2,$$

et

$$y_p''(x) = 2b + 6ax.$$

On remplace y_p, y_p' et y_p'' dans l'équation (1.26) on a :

$$\begin{aligned} (1.26) &\Rightarrow (2b + 6ax) + \frac{1}{2}(c + 2bx + 3ax^2) - \frac{3}{2}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}, \\ &\Rightarrow -\frac{3}{2}ax^3 + \left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b\right)x^2 + \left(6a + b - \frac{3}{2}c\right)x + \left(2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d\right) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}a = -\frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b = 0, \\ 6a + b - \frac{3}{2}c = 1, \\ 2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = 4, \\ d = 3. \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p de (1.26) est

$$y_p(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= x^3 + x^2 + 4x + 3 + Ae^x + Be^{-\frac{3}{2}x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.26).

Pour le problème de Cauchy (1.27) on a :

$$y(0) = 0, \quad d'où : 3 + A + B = 0,$$

et

$$\begin{aligned} y'(0) = 4 &\Rightarrow \left(x^3 + x^2 + 4x + 3 + Ae^x + Be^{-\frac{3}{2}x} \right)'_{x=0} = 4, \\ &\Rightarrow \left(3x^2 + 2x + 4 + Ae^x - \frac{3}{2}Be^{-\frac{3}{2}x} \right)_{x=0} = 4, \\ &\Rightarrow 4 + A - \frac{3}{2}B = 4, \\ &\Rightarrow A - \frac{3}{2}B = 0. \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{cases} 3 + A + B = 0, \\ A - \frac{3}{2}B = 0. \end{cases} \quad d'où : \begin{cases} A = -\frac{9}{5}, \\ B = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$

Alors

$$Y(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3 - \frac{9}{5}e^x - \frac{6}{5}e^{-\frac{3}{2}x},$$

est la solution de problème du Cauchy (1.27).

Exemple 1.16 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}. \quad (1.29)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad (1.30)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 4 = 0. \quad (1.31)$$

On a : $\Delta = (-4)^2 - 4(4) = 0$, la racine double de l'équation (1.31) est $r_1 = r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.30) est

$$y(x) = (Ax + B)e^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (1.29) :

$$\text{On a : } f(x) = e^{2x} = 1e^{2x}.$$

Comme 2 est une racine double de l'équation caractéristique (1.31), nous devons chercher une solution particulière de l'équation (1.29) sous la forme :

$$y_p(x) = kx^2e^{2x}, k \in \mathbb{R},$$

donc

$$y'_p(x) = (2kx^2 + 2kx)e^{2x},$$

et

$$y''_p(x) = (4kx^2 + 8kx + 2k)e^{2x},$$

on remplace y_p , y'_p et y''_p dans (1.29) on a :

$$(4kx^2 + 8kx + 2k)e^{2x} - 4(2kx^2 + 2kx)e^{2x} + 4(kx^2e^{2x}) = e^{2x},$$

on obtient : $2ke^{2x} = e^{2x}$ d'où $k = \frac{1}{2}$.

Donc la solution particulière y_p de l'équation (1.29) est

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= (Ax + B)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.29).

Exemple 1.17 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + y = (x + 2) e^x. \quad (1.32)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad (1.33)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = 0. \quad (1.34)$$

On a : $\Delta = (-2)^2 - 4(1) = 0$, la racine double de l'équation (1.34) est $r_1 = r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (1.33) est

$$y(x) = (Ax + B) e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (1.32) :

$$\text{On a : } f(x) = (x + 2) e^{1x}.$$

Comme 1 est une racine double de l'équation caractéristique (1.34), nous devons chercher une solution particulière y_p de (1.32) sous la forme :

$$y_p(x) = x^2 (ax + b) e^x = (ax^3 + bx^2) e^x,$$

où a et $b \in \mathbb{R}$.

Donc

$$y_p'(x) = (ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx) e^x,$$

et

$$y_p''(x) = (ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b)x + 2b) e^x,$$

on remplace y_p , y_p' et y_p'' dans l'équation (1.32) on a :

$$(1.32) \Rightarrow (6ax + 2b) e^x = (x + 2) e^x.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 6a = 1, \\ 2b = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6}, \\ b = 1. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (1.32) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + x^2\right)e^x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= (Ax + B)e^x + \left(\frac{1}{6}x^3 + x^2\right)e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est une solution générale de (1.32).

- **Cas le second membre est du type :** $(P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$.

Si $f(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$, on cherche une solution particulière sous la forme :

- $y_p = e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.22).

- $y_p = xe^{\alpha x} (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x)$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique (1.22).

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré n avec

$$n = \max \{ \deg P_1, \deg P_2 \}.$$

Exemple 1.18 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y = \cos x. \quad (1.35)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 4y = 0, \quad (1.36)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 4 = 0. \quad (1.37)$$

On a : $\Delta = (0)^2 - 4(4) = -16 < 0$, l'équation (1.37) admet deux racines complexes conjuguées qui sont : $r = 2i, \bar{r} = -2i$. Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.36) est

$$y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (1.35) :

On a : $f(x) = \cos x$

Comme i n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.37), donc on cherche la solution particulière y_p de (1.35) sous la forme :

$$y_p(x) = h \cos x + k \sin x, h \text{ et } k \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p'(x) = -h \sin x + k \cos x,$$

et

$$y_p''(x) = -h \cos x - k \sin x,$$

on remplace y_p , y_p' et y_p'' dans l'équation (1.35) on a :

$$\begin{aligned} (1.35) \Rightarrow & (-h \cos x - k \sin x) + 4(h \cos x + k \sin x) = \cos x, \\ \Rightarrow & 3h \cos x + 3k \sin x = \cos x. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3h = 1, \\ 3k = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{3}, \\ k = 0. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (1.35) est

$$y_p(x) = \frac{1}{3} \cos x$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.35).

Exemple 1.19 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 9y = \sin 3x. \quad (1.38)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 9y = 0, \quad (1.39)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0. \quad (1.40)$$

On a : $\Delta = (0)^2 - 4(9) = -36 < 0$, donc l'équation (1.40) admet deux racines complexes conjuguées qui sont : $r = 3i, \bar{r} = -3i$. Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.39) est

$$y(x) = A \cos 3x + B \sin 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (1.38) :

$$\text{On a : } f(x) = \sin 3x.$$

Comme $3i$ est une racine de l'équation caractéristique (1.40), donc on cherche la solution particulière y_p de l'équation (1.38) sous la forme :

$$y_p(x) = x(h \cos 3x + k \sin 3x)e^{0x} = hx \cos 3x + kx \sin 3x, h \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y_p'(x) = (3kx + h) \cos 3x + (k - 3hx) \sin 3x,$$

et

$$y_p''(x) = (-9hx + 6k) \cos 3x + (-6h - 9kx) \sin 3x,$$

on remplace y_p , y_p' et y_p'' dans l'équation (1.38) on a :

$$\begin{aligned} (b) \Rightarrow & (-9hx + 6k) \cos 3x + (-6h - 9kx) \sin 3x + 9(hx \cos 3x + kx \sin 3x) = \sin 3x, \\ \Rightarrow & 6k \cos 3x + (-6h) \sin 3x = \sin 3x. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 6k = 0, \\ -6h = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0, \\ h = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (1.38) est

$$y_p(x) = \frac{-1}{6}x \cos 3x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A \cos 3x + B \sin 3x - \frac{1}{6}x \cos 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de (1.38).

Principe de superposition :

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière y_p est donnée par :

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_1(x),$$

et y_{p_2} est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_2(x).$$

Exemple 1.20 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x} \quad (1.41)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad (1.42)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0. \quad (1.43)$$

On a : $\Delta = (-5)^2 - 4(6) = 1$, les racines de l'équation (1.43) sont : $r_1 = 2, r_2 = 3$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.42) est :

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation (1.41) :

D'après le principe de superposition des solutions, pour trouver une solution particulière de l'équation (1.41), il nous suffira de trouver une solution particulière de chacune des équations suivantes :

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}, \quad (1.44)$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}. \quad (1.45)$$

Recherche d'une solution particulière y_{p_1} de l'équation (1.44) :

On a : $f_1(x) = 2e^{3x}$.

Comme 3 est une racine de multiplicité 1 (racine simple) de l'équation caractéristique (1.43), on cherche une solution particulière de l'équation (1.44) sous la forme :

$$y_{p_1}(x) = \lambda x e^{3x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y'_{p_1}(x) = \lambda e^{3x} + 3\lambda x e^{3x},$$

et

$$y''_{p_1}(x) = 6\lambda e^{3x} + 9\lambda x e^{3x},$$

on remplace y_{p_1} , y'_{p_1} et y''_{p_1} dans l'équation (1.44), on obtient :

$$\begin{aligned} (1.44) \Rightarrow y'' - 5y' + 6y &= 2e^{3x} \\ \Rightarrow \lambda e^{3x} &= 2e^{3x}, \end{aligned}$$

d'où $\lambda = 2$. Donc la solution particulière de l'équation (1.44) est

$$y_{p_1}(x) = 2x e^{3x}.$$

Recherche d'une solution particulière y_{p_2} de l'équation (1.45) :

On a : $f_2(x) = e^{4x}$.

Comme 4 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.43), on cherche une solution particulière de (1.45) sous la forme :

$$y_{p_2}(x) = k e^{4x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y'_{p_2}(x) = 4k e^{4x},$$

et

$$y''_{p_2}(x) = 16k e^{4x}$$

on remplace y_{p_2} , y'_{p_2} et y''_{p_2} dans l'équation (1.45) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.45) \Rightarrow 16k e^{4x} - 20k e^{4x} + 6k e^{4x} &= e^{4x} \\ \Rightarrow 2k e^{4x} &= e^{4x} \end{aligned}$$

d'où $k = \frac{1}{2}$. Donc y_{p_2} la solution particulière de l'équation (1.45) est

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{2} e^{4x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= Ae^{2x} + Be^{3x} + 2xe^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.41).

1.5 Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants

Dans cette partie, on s'intéressera à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants.

Définition 1.11 On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants toute équation de la forme :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1.46)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des constantes réelles.

Pour résoudre (1.46) on procède comme suit :

On cherche les solutions sous la forme : $y = e^{\lambda x}$ où λ une constante à déterminer.

Donc,

$$y = e^{\lambda x}, \quad y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x}, \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

En remplaçons (1.46) obtient

$$(1.46) \Leftrightarrow a_0 \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda x} (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) = 0$$

Comme $e^{\lambda x} \neq 0$, on aura :

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1.47)$$

L'équation (1.47) est appelé équation caractéristique associée à (1.46).

On cherche les racines de l'équation caractéristique (1.47). Suivant ces racines on écrit les solutions particulières en tenant compte du fait que :

a) A chaque racine réelle simple λ correspond une seule solution particulière $y_p = e^{\lambda x}$.

b) A chaque couple de racines complexe conjugué $\lambda = a \pm bi$ correspond deux solutions particulières : $e^{ax} \cos bx$ et $e^{ax} \sin bx$.

c) A chaque racine réelle λ de multiplicité s correspond des solutions particulières: $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \dots, x^{s-1}e^{\lambda x}$.

d) A chaque couple $\lambda = a \pm bi$ de racines complexe conjugué de multiplicité s correspond des solutions particulières:

$$\begin{aligned} &e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, x^2e^{ax} \cos bx, \dots, x^{s-1}e^{ax} \cos bx. \\ &e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \sin bx, x^2e^{ax} \sin bx, \dots, x^{s-1}e^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

Le nombre de ces solutions particulières est égal au l'ordre de équation différentielle proposée (qui aussi degré de l'équation de l'équation caractéristique).

Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ sont n solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation (1.46), alors on écrit la solution générale de équation différentielle (1.46) sous la forme :

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont des constantes réelles.

Exemple 1.21 Résoudre l'équation suivante :

$$y''' + 2y'' + y' = 0 \quad (1.48)$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \quad (1.49)$$

On a : (1.49) $\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1)^2 = 0$. Les racines de (1.49) sont : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

On a : -1 est une racine double de (1.49), donc la solution générale de l'équation (1.48) est :

$$Y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x},$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes réelles.

Exemple 1.22 Résoudre l'équation suivante :

$$y''' + y'' + y' + y = 0 \quad (1.50)$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad (1.51)$$

On a :

$$(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0) \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

Les racines de (1.51) sont : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$, donc la solution générale de l'équation (1.50) est :

$$\begin{aligned} Y(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 e^0 \sin(x) + C_3 e^0 \cos(x), \\ &= C_1 e^{-x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x, \end{aligned}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes réelles.

Exemple 1.23 Résoudre l'équation suivante :

$$y^{(4)} + 4y = 0 \quad (1.52)$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^4 + 4 = 0 \quad (1.53)$$

On a :

$$(\lambda^4 + 4 = 0) \Leftrightarrow (\lambda^2 + 2i)(\lambda^2 - 2i) = 0$$

Les racines de (1.53) sont : $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$, $\lambda_3 = 1 + i$ et $\lambda_4 = 1 - i$, donc la solution générale de l'équation (1.52) est :

$$Y(x) = C_1 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x + C_3 e^x \sin x + C_4 e^x \cos x,$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes réelles.

Exemple 1.24 Résoudre l'équation suivante :

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (1.54)$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^4 - 1 = 0 \quad (1.55)$$

On a :

$$\begin{aligned} (\lambda^4 - 1 = 0) &\Rightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 1 = 0 \\ \lambda^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines de (1.55) sont : $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = -1$, donc la solution générale de l'équation (1.54) est :

$$Y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^x + C_4 e^{-x},$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes réelles.

1.6 Exercices corrigés

Exercice 1.25 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy' - y - 3 = 0 \tag{1.56}$$

Solution.

$$\begin{aligned} (1.56) &\Rightarrow xy' = y + 3, \\ &\Rightarrow \frac{y'}{y+3} = \frac{1}{x} \text{ (est à variables séparées)} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{1}{x} dx, \\ &\Rightarrow \ln|y+3| = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}. \\ &\Rightarrow |y+3| = e^{\ln|x|+c}, c \in \mathbb{R}. \\ &\Rightarrow y+3 = \pm e^c e^{\ln|x|}, c \in \mathbb{R}. \\ &\Rightarrow y+3 = \pm e^c |x|, c \in \mathbb{R}. \\ &\Rightarrow y = -3 + kx, k = \pm e^c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc,

$$y(x) = -3 + kx \text{ où } k \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.56).

Exercice 1.26 a) Résoudre l'équation différentielle de premier ordre suivante :

$$y' = 2y + (x^2 + 3x + 1) e^{2x} = 0 \quad (1.57)$$

b) Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = 2y + (x^2 + 3x + 1) e^{2x} = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Solution.

a) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' = 2y + (x^2 + 3x + 1) e^{2x} = 0$$

L'équation homogène associée est

$$y' = 2y \quad (1.58)$$

Remarquons que : $y = 0$ est une solution évidente de (1.58).

On suppose que $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = 2 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2dx, \\ &\Rightarrow \ln |y| = 2x + k, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = \pm e^k e^{2x}, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = ce^{2x}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (c = \pm e^k). \end{aligned}$$

Alors,

$$y_h(x) = ce^{2x}, \quad c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.58).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y(x) = c(x) e^{2x} \Rightarrow y'(x) = c'(x) e^{2x} + 2c(x) e^{2x}$. En remplaçant y et y' dans (1.57) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.57) &\Rightarrow c'(x) e^{2x} + 2c(x) e^{2x} = 2c(x) e^{2x} + (x^2 + 3x + 1) e^{2x}, \\ &\Rightarrow c'(x) e^{2x} = (x^2 + 3x + 1) e^{2x}, \\ &\Rightarrow c'(x) = (x^2 + 3x + 1), \\ &\Rightarrow c(x) = \int (x^2 + 3x + 1) dx \\ &\Rightarrow c(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc,

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + \lambda \right) e^{2x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de (1.57).

b) Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = 2y + (x^2 + 3x + 1) e^{2x} = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Pour le problème de Cauchy on a :

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}.0^3 + \frac{3}{2}.0^2 + 0 + \lambda \right) e^{2(0)} = 2 \\ &\Rightarrow \lambda = 2. \end{aligned}$$

Donc,

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 2 \right) e^{2x},$$

est la solution du problème de Cauchy .

Exercice 1.27 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1+x^2)^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 2xy^2 = 0 \quad (1.59)$$

Solution.

$$(1.59) \Rightarrow (1+x^2)^2 \frac{dy}{dx} = -2x(1+y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx \quad (\text{cette équation est à variables séparées})$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = - \int 2x(1+x^2)^{-2} dx$$

$$\Rightarrow \arctan y = -\frac{1}{-2+1} (1+x^2)^{-2+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \arctan y = \frac{1}{1+x^2} + c, c \in \mathbb{R}$$

donc, $y(x) = \tan \left(\frac{cx^2 + c + 1}{1+x^2} \right), c \in \mathbb{R}$ est la solution générale de (1.59).

Exercice 1.28 Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) dx - xy dy = 0, \\ y(1) = 2. \end{cases} \quad (1.60)$$

Solution.

On va résoudre d'abord l'équation :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) dx - xy dy &= 0 \\ (1.61) \Rightarrow (x^2 + y^2) dx &= xy dy \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \left(\frac{y}{x}\right) \dots\dots (E)$$

cette équation (E) est homogène car elle est de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

On pose le changement de variable suivant :

$$U = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xU \Rightarrow y' = U + xU',$$

puis on remplace dans (E) on obtient :

$$\begin{aligned} (E) \Rightarrow U + xU' &= \frac{1}{U} + U \\ \Rightarrow xU' &= \frac{1}{U} \\ \Rightarrow U \frac{dU}{dx} &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow U dU &= \frac{1}{x} dx \text{ (cette équation est à variables séparées d'inconnu } U) \\ \Rightarrow \int U dU &= \int \frac{1}{x} dx \\ \Rightarrow \frac{1}{2} U^2 &= \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow U^2 &= 2 \ln|x| + 2c, c \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow U &= \pm \sqrt{2 \ln|x| + 2c}, c \in \mathbb{R}, \text{ est la solution générale de (E)} \end{aligned}$$

Mais on a posé $y = xU$, alors

$$y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln |x| + 2c}, c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (1.61).

$$\text{On a } y(1) = 2 \text{ donc } y(1) = \pm 1 \sqrt{2 \ln |1| + 2c} = 2 \Rightarrow \sqrt{2c} = \pm 2 \Rightarrow c = 2$$

Alors

$$y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln |x| + 4}, c \in \mathbb{R}$$

est la solution de problème de Cauchy (1.60).

Exercice 1.29 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + y = x^2 \tag{1.62}$$

Solution.

On a : (1.62) $\Leftrightarrow y' = -y + x^2$ (cette équation est linéaire de premier ordre).

On va résoudre d'abord l'équation homogène associée

$$y' = -y \tag{1.63}$$

$$(1.63) \Rightarrow y' = -y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \text{ (est variables séparées)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -dx$$

$$\Rightarrow \ln |y| = -x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{-x+c}, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^c e^{-x}, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = k e^{-x}, k \in \mathbb{R} \text{ est la solution de (1.63).}$$

On utilise la variation de la constante.

Posons $y = k(x) e^{-x}$ où k est fonction réelle.

On a : $y = k(x) e^{-x} \Rightarrow y' = k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x}$, puis on remplace dans (1.62) on obtient :

$$(1.62) \Rightarrow k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x} = -k(x) e^{-x} + x^2$$

$$\Rightarrow k'(x) e^{-x} = x^2$$

$$\Rightarrow k'(x) = x^2 e^x$$

$$\Rightarrow k(x) = \int x^2 e^x dx$$

Dans ce cas pour avoir $k(x)$ on peut utilisé l'intégration par partie deux fois pour calculer $\int x^2 e^x dx$. Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive $x^2 e^x$ sous la forme : $(ax^2 + bx + c) e^x$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$

On a :

$$[(ax^2 + bx + c) e^x]' = x^2 e^x \Rightarrow (2ax + b) e^x + (ax^2 + bx + c) e^x = x^2 e^x$$

$$\Rightarrow (ax^2 + (2a + b)x + b + c) e^x = x^2 e^x$$

par identification on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

d'où,

$$k(x) = \int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + c, c \in \mathbb{R}.$$

On a : $y = k(x) e^{-x}$, donc $y = ((x^2 - 2x + 2) e^x + c) e^{-x}, c \in \mathbb{R}$

Alors,

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}, c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (1.62).

Exercice 1.30 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy' + 6y - 3xy^{\frac{4}{3}} = 0 \tag{1.64}$$

Solution.

On a :

$$(1.64) \iff \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}} + 6 \left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} \right) - 3x = 0, \text{ pour } y \neq 0.$$

Cette équation (1.64) est de Bernoulli.

En posant le changement de variable $z = \frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} = y^{-\frac{1}{3}}$, on aura :

$$z' = \frac{-1}{3} y^{-\frac{4}{3}} y' \Rightarrow y' = -3y^{\frac{4}{3}} z'.$$

Substituant dans l'équation (1.64) les expressions y et y' on obtient :

$$(1.64) \iff \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}} + 6 \left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} \right) - 3x = 0$$

$$\iff -3xz' + 6z - 3x = 0$$

$$\iff z' = \frac{2}{x}z - 1 \dots\dots (E).$$

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnu z .

L'équation homogène associée à (E') est

$$z' = \frac{2}{x}z \dots\dots\dots (EH)$$

Résolution de l'équation (EH) :

$$\begin{aligned} (EH) &\Rightarrow \frac{z'}{z} = \frac{2}{x}, \\ &\Rightarrow \ln |z| = 2 \ln |x| + k, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow |z| = e^{\ln x^2 + k}, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = \pm e^k x^2, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = cx^2, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (c = \pm e^k) \end{aligned}$$

D'où

$$z_h(x) = cx^2, \quad c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (EH).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $z(x) = c(x)x^2$, où c est une fonction réelle.

donc : $z(x) = c(x)x^2 \Rightarrow z'(x) = c'(x)x^2 + 2xc(x)$.

En remplaçant z et z' dans (E), on obtient :

$$(E) \Rightarrow c'(x)x^2 + 2xc(x) = \frac{2}{x}c(x)x^2 - 1$$

$$\Rightarrow c'(x) = \frac{-1}{x^2},$$

$$\Rightarrow c(x) = \int \frac{-1}{x^2} dx,$$

$$\Rightarrow c(x) = \frac{1}{x} + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

d'où $z(x) = \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)x^2, \lambda \in \mathbb{R}$, donc

$$z(x) = x + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E).

Mais on a : $z = y^{\frac{-1}{3}}$ d'où $y = \frac{1}{z^3}$. donc :

$$y(x) = \frac{1}{(x + \lambda x^2)^3} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (1.64).

Exercice 1.31 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

a) $y'' + 4y' + 3y = 0.$

b) $y'' - 6y' + 9y = 0.$

c) $y'' - 4y + 13 = 0.$

d) $y'' + 6y' + 13y = 0.$

e) $y'' - 2\alpha y' + y = 0, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$

f) $y'' - 2y' + my = 0, m \in \mathbb{R}.$

Solution.

a) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$. Ainsi, la solution générale est

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

b) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 6r + 9 = 0,$$

cette équation admet la racine réelle double $r = 3$. Ainsi, la solution générale est

$$y(x) = (A + Bx)e^{3x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

c) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y + 13 = 0$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 13 = 0,$$

On a : $\Delta = 16 - 4(1)(13) = -36 = (6i)^2$, cette équation admet deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - (6i)}{2} = 2 - 3i$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + (6i)}{2} = 2 + 3i.$$

Ainsi, la solution générale est

$$y(x) = (A \cos 3x + B \sin 3x)e^{2x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

d) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 6r + 13 = 0,$$

cette équation admet deux racines complexe conjugué $r_1 = -3-2i$ et $r_2 = -3+2i$.
Ainsi, la solution générale est

$$y(x) = A(\cos 2x)e^{-3x} + B(\sin 2x)e^{-3x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

e) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2\alpha y' + y = 0, \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2\alpha r + 1 = 0$$

On a : $\Delta = 4\alpha^2 - 4$.

Dans l'étude des racines de l'équation caractéristique, trois cas peuvent se présenter selon le signe de discriminant Δ .

$$\begin{aligned} \Delta > 0 & \quad \text{si} \quad \alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \Delta = 0 & \quad \text{si} \quad \alpha \in \{-1, 1\} \\ \Delta < 0 & \quad \text{si} \quad \alpha \in]-1, 1[\end{aligned}$$

Premier cas : Si $\alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ on a : $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes

Alors la solution générale est

$$y(x) = Ae^{(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})x} + Be^{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Deuxième cas :

- Si $\alpha = -1$, on a : $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine réelle double $r = -1$, alors la solution générale est

$$y(x) = (A + Bx)e^{-x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\alpha = 1$ on a : $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine réelle double $r = 1$, alors la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = (A + Bx)e^x, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Troisième cas : Si $\alpha \in]-1, 1[$ on a : $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2\alpha + i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2} \\ r_2 &= \frac{2\alpha - i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha - i\sqrt{1 - \alpha^2} \end{aligned}$$

alors la solution générale est

$$y(x) = \left(A \sin \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \right) x + B \cos \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \right) x \right) e^{\alpha x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

f) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + my = 0, m \in \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + m = 0$$

On a : $\Delta = 4 - 4m$.

Dans l'étude des racines de l'équation caractéristique, trois cas peuvent se présenter selon le signe de discriminant Δ .

$$\begin{aligned} \Delta > 0 & \text{ si } m \in]-\infty, 1[\\ \Delta = 0 & \text{ si } m = 1 \\ \Delta < 0 & \text{ si } m \in]1, +\infty[\end{aligned}$$

Alors la solution est

$$\begin{aligned} \text{Si } m \in]-\infty, 1[, & \quad y(x) = Ae^{(1+\sqrt{1-m})x} + Be^{(1-\sqrt{1-m})x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R} \\ \text{Si } m \in]1, +\infty[, & \quad y(x) = \left(A \sin \left(\sqrt{m-1} \right) x + B \cos \left(\sqrt{m-1} \right) x \right) e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R} \\ \text{Si } m = 1, & \quad y(x) = (Ax + B) e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 1.32 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = (x + 1)e^{3x} \quad (1.65)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (1.66)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad (1.67)$$

On a : $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1$, les racines de l'équation (1.67) sont : $r_1 = 1, r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.66) est

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (1.82) :

On a le second membre de l'équation (1.82) est

$$f(x) = (x+1)e^{3x}.$$

Comme 3 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.67), donc on cherche la solution particulière de (1.82) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax+b)e^{3x} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p'(x) = ae^{3x} + 3(ax+b)e^{3x} = (3ax+a+3b)e^{3x}$$

et

$$y_p''(x) = 3ae^{3x} + 3(3ax+a+3b)e^{3x} = (9ax+6a+9b)e^{3x}$$

On remplace y_p, y_p' et y_p'' dans l'équation (1.82) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.82) &\Rightarrow (9ax+6a+9b)e^{3x} - 3(3ax+a+3b)e^{3x} + 2(ax+b)e^{3x} = (x+1)e^{3x}, \\ &\Rightarrow (9ax+6a+9b) - 3(3ax+a+3b) + 2(ax+b) = (x+1), \\ &\Rightarrow 2ax + (3a+2b) = x+1 \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p de (1.82) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{3x}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= Ae^x + Be^{2x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{3x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.82).

Exercice 1.33 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - y = x^2 + x + 1 \quad (1.68)$$

Solution.

L'équation homogène associée est

$$y'' - y = 0 \quad (1.69)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 1 = 0 \quad (1.70)$$

les racines de l'équation (1.70) sont : $r_1 = -1, r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.69) est

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^x, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (1.68) :

On a le second membre de l'équation (1.68) est

$$f(x) = x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)e^{0x}.$$

Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.70), donc on cherche une solution particulière de (1.68) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{0x} = ax^2 + bx + c,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors

$$y_p'(x) = 2ax + b \quad \text{et} \quad y_p''(x) = 2a.$$

Substituant dans l'équation (1.68) les expressions y_p et y_p'' on obtient :

$$(1.68) \Rightarrow 2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1,$$

$$\Rightarrow -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x + 1,$$

par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a = 1, \\ -b = 1, \\ 2a - c = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = -1, \\ c = -3, \end{cases}$$

d'où la solution particulière y_p de (1.68) est

$$y_p(x) = -x^2 - x - 3.$$

Alors

$$Y(x) = y_p(x) + y(x) = -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^x, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de l'équation (1.68).

Exercice 1.34 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' - 8y = e^x \quad (1.71)$$

Solution.

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' - 8y = 0 \quad (1.72)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r - 8 = 0 \quad (1.73)$$

les racines de l'équation (1.73) sont : $r_1 = -2, r_2 = 4$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.72) est

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{4x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (1.71) :

On a le second membre de l'équation (1.71) est

$$f(x) = e^x = e^{1x}.$$

Comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.73), donc on cherche une solution particulière de (1.71) sous la forme : $y_p(x) = ae^x$ où $a \in \mathbb{R}$, alors

$$y_p'(x) = ae^x \quad \text{et} \quad y_p''(x) = ae^x.$$

Substituant dans l'équation (1.71) les expressions y_p, y'_p et y''_p on obtient :

$$(1.71) \Rightarrow ae^x - 2ae^x - 8ae^x = e^x,$$

$$\Rightarrow -9a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1}{9}.$$

donc la solution particulière y_p de (1.71) est

$$y_p(x) = \frac{-1}{9}e^x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= \frac{-1}{9}e^x + Ae^{-2x} + Be^{4x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.71).

Exercice 1.35 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' = \sin x \quad (1.74)$$

Solution.

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' = 0 \quad (1.75)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r = 0 \quad (1.76)$$

les racines de l'équation (1.76) sont : $r_1 = 0, r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.75) est

$$y(x) = Ae^{0x} + Be^{2x} = A + Be^{2x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (1.74) :

On a le second membre de l'équation (1.74) est

$$f(x) = \sin x = \sin(1x)e^{0x}.$$

Comme $0 + 1i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.76), donc on cherche une solution particulière y_p de l'équation (1.74) sous la forme $y_p(x) = (a \sin x + b \cos x) e^{0x} = a \sin x + b \cos x$, où a et $b \in \mathbb{R}$

On a :

$$y_p'(x) = a \cos x - b \sin x \quad \text{et} \quad y_p''(x) = -a \sin x - b \cos x.$$

Substituant dans l'équation (1.74) les expressions y_p, y_p' et y_p'' on obtient :

$$\begin{aligned} (1.74) \quad &\Rightarrow -a \sin x - b \cos x - 2(a \cos x - b \sin x) = \sin x, \\ &\Rightarrow (-a + 2b) \sin x + (-b - 2a) \cos x = \sin x. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a + 2b = 1, \\ -b - 2a = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5}, \\ b = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (1.74) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A + Be^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de (1.74).

Exercice 1.36 Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}, \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.77)$$

Solution.

On va résoudre d'abord l'équation :

$$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x} \quad (1.78)$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \quad (1.79)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \quad (1.80)$$

Les racines de l'équation (1.80) sont : $r_1 = 1$, $r_2 = 3$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.79) est

$$y(x) = Ae^x + Be^{3x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (1.78) :

On a le second membre de l'équation (1.78) est

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

Comme -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.80), donc on cherche une solution particulière de (1.78) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax + b)e^{-x}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p'(x) = (-ax + a - b)e^{-x} \text{ et } y_p''(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}.$$

Substituant dans l'équation (1.78) les expressions y_p , y_p' et y_p'' on obtient :

$$\begin{aligned} (1.78) \Rightarrow (ax - 2a + b)e^{-x} - 4(-ax + a - b)e^{-x} + 3(ax + b)e^{-x} &= (2x + 1)e^{-x}, \\ \Rightarrow 8ax - 6a + 8b &= 2x + 1. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 8a = 2, \\ -6a + 8b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{5}{16}, \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p de (1.78) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x}.$$

Alors

$$Y(x) = y_p(x) + y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + Be^{3x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de l'équation (1.78).

Pour le problème de Cauchy (1.77) on a :

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0 \dots (1)$$

et on a :

$$y'(x) = \left(\frac{-1}{4}x + \frac{-1}{16} \right) e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x},$$

d'où

$$y'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{16} + A + 3B = 0 \dots (2)$$

De (1) et (2) on a :

$$\begin{cases} \frac{5}{16} + A + B = 0 \\ \frac{-1}{16} + A + 3B = 0 \end{cases} \quad d'où : \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = \frac{3}{16}. \end{cases}$$

Alors

$$Y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16} \right) e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{16}e^{3x},$$

est la solution de problème du Cauchy (1.77).

Exercice 1.37 1) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = -y + 1 - 2e^x, \\ y(0) = -3. \end{cases} \quad (1.81)$$

2) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = 4 - 4x^2. \quad (1.82)$$

Solution.

1) Résoudre le problème de Cauchy (1.81) :

On va résoudre d'abord l'équation différentielle suivante :

$$y' = -y + 1 - 2e^x \quad (1.83)$$

L'équation homogène associée est

$$y' = -y \quad (1.84)$$

Remarquons que : $y = 0$ est une solution évidente de (1.84).

On suppose que $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} = -1 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (-1) dx, \\ &\Rightarrow \ln |y| = -x + k, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = \pm e^k e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = ce^{-x}, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{où } (c = \pm e^k).\end{aligned}$$

Alors, $y_h(x) = ce^{-x}, c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de (1.84).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y(x) = c(x)e^{-x}$, donc on a : $y'(x) = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$. En remplaçant y et y' dans (1.83) on obtient :

$$\begin{aligned}(1.83) &\Rightarrow c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} = -c(x)e^{-x} + 1 - 2e^x, \\ &\Rightarrow c'(x)e^{-x} = 1 - 2e^x, \\ &\Rightarrow c'(x) = e^x - 2e^{2x}, \\ &\Rightarrow c(x) = e^x - e^{2x} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc, $y(x) = (e^x - e^{2x} + \lambda)e^{-x} = 1 - e^x + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Alors, $y(x) = 1 - e^x + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$, est la solution générale de (1.83).

Pour le problème de Cauchy (1.81) on a : $y(0) = -3 \Rightarrow \lambda = -3$.

Donc, $y(x) = 1 - e^x - 3e^{-x}$, est la solution du problème de Cauchy (1.81).

2) Résoudre l'équation différentielle (1.82) suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = 4 - 4x^2.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{1.85}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \tag{1.86}$$

On a : $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1$, les racines de l'équation (1.86) sont : $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.85) est

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (1.82) :

On a le second membre de l'équation (1.82) est

$$f(x) = 4 - 4x^2 = (1 - x^2)e^{0 \cdot x}.$$

Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.67), donc on cherche la solution particulière de (1.82) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{0 \cdot x} = ax^2 + bx + c \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$\text{alors, } y_p'(x) = 2ax + b \quad \text{et } y_p''(x) = 2a.$$

On remplace y_p , y_p' et y_p'' dans l'équation (1.82) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.82) &\Rightarrow 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 4 - 4x^2, \\ &\Rightarrow 2ax^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c) = 1 - x^2. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a = -4 \\ 2b - 6a = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2, \\ b = -6, \\ c = -5 \end{cases}$$

donc, la solution particulière y_p de (1.82) est $y_p(x) = -2x^2 - 6x - 5$.

Alors, $Y(x) = y(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{2x} - 2x^2 - 6x - 5$, A et $B \in \mathbb{R}$.
est la solution générale de l'équation (1.82).

Exercice 1.38 Résoudre l'équation suivante :

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \tag{1.87}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \tag{1.88}$$

Remarquons que 1 et -1 sont des racines de l'équation (1.88), donc on a :

$$\begin{aligned} (\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0) &\Rightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 1 = 0 \\ \lambda^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \\ \lambda_4 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, la solution générale de l'équation (1.87) est :

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x},$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes réelles.

Exercice 1.39 Résoudre l'équation suivante :

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (1.89)$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad (1.90)$$

Remarquons que 1 et -1 sont des racines de l'équation (1.90), donc on a :

$$\begin{aligned} (\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0) &\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, la solution générale de l'équation (1.89) est :

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x},$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes réelles.

Exercice 1.40 Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation suivante :

$$y''' - 3my'' + 3m^2y' - m^3y = 0 \quad (1.91)$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 - 3m\lambda^2 + 3m^2\lambda - m^3 = 0 \quad (1.92)$$

Remarquons que $\lambda^3 - 3m\lambda^2 + 3m^2\lambda - m^3 = (\lambda - m)^3$, alors $\lambda = m$ est une racine triple de l'équation (1.92), alors, la solution générale de l'équation (1.91) est :

$$Y(x) = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} + C_3 x^2 e^{mx},$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes réelles.