Université A. MIRA -Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Siences et Technologie

Année universitaire 2025-2026
Algèbre 2
$1^{\text{ère}}$ *année ST-LMD*

Série de TD ň 02 : Matrices et déterminants

I. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 23 \\ 0 & -5 \\ -13 & 40 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 2}}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & \cdots & 91 \\ \cdots & -1 & \cdots \\ 21 & \cdots & 19 \end{pmatrix} = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 3}}.$$

1. Donner le type (l'ordre,la taille) des matrices A et B.
2. Donner la valeur de chacun de ces éléments de A : a_{12}, a_{21} et a_{32}.
3. Compléter l'écriture de la matrice B avec : $b_{32} = -4$, $b_{21} = 11$, $b_{23} = \sqrt{3}$ et $b_{12} = \dfrac{7}{5}$.
4. Ecrire la matrice transposée A^t et donner sa taille. Même question pour la matrice B.

II. Trouver les éléments de la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 2}}$ telles que :

$$c_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}(i-j) & ; \quad \text{si } i > j \\ 1 & ; \quad \text{si } i = j \\ (-1)^{i+j}(j-i) & ; \quad \text{si } j > i \end{cases}$$

Exercice 02 : I. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Calculer, si possible, les expressions suivantes : $A+C$, $C-A$, $-2A+3C$, $-2A^t+3C^t$, $A+B$, $B-C$, AB, BA, B^tA^t, XB, AX, $(4C)\left(\dfrac{1}{2}A\right)$, $(C+2I_3)A$, A^2, B^2, X^tX.

II. Déterminer les matrices M et N sachant que :

$$M + N = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M - N = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 03 : I. On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de A.
   a. En développant selon la deuxième ligne.
   b. En développant selon la la troisième colonne.
   c. Par la règle de Sarrus.
2. A est-elle inversible? Si oui calculer son inverse.

Exercices supplémentaires :

Exercice 04 : Soient les matrice A et B définie par : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 2A$ et déduire que $A^3 = 4A$.
2. Déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La matrice A est-elle inversible ? .
4. Calculer la matrice $C = B^2 - 3B + 2I_3$. (I_3 est la matrice identité)
5. Déduire B^{-1}

Exercice 05 : I. On considère la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Déduire que : $M^3 + 2M^2 - M - 2I_3 = 0$.
2. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.