• Exercice 8 (supplémentaire) :

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (\alpha x+\beta,\ x+y+z,\ -x)$$

1/ cherchons α, β ?

Soit $X=(x,y,z)$, $Y=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$.

$$X+Y=(x+x',\ y+y',\ z+z').$$

et $h(X+Y)=(\alpha(x+x')+\beta,\ x+x'+y+y'+z+z',\ -(x+x'))$.

• h est linéaire $\Leftrightarrow h(X+Y)=h(X)+h(Y)$ et $h(\lambda X)=\lambda h(X), \lambda\in\mathbb{R}$.

En effet, on a :

$h(X+Y)=h(X)+h(Y) \Leftrightarrow \alpha(x+x')+\beta=(\alpha x+\beta)+(\alpha x'+\beta)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(x+x')=\alpha x+\alpha x', \forall \alpha\in\mathbb{R}. \\ \wedge \\ \beta=2\beta \Rightarrow \underline{\beta=0}. \end{cases}$$

De même $h(\lambda X)=\lambda . h(X) \Leftrightarrow \beta=\lambda.\beta, \forall\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \underline{\underline{\beta=0}}$.

Donc : h est linéaire $\Leftrightarrow \alpha\in\mathbb{R}$ et $\underline{\beta=0}$.

2/ $h\circ h(x,y,z)=h(h(x,y,z))$.

$$=h(\alpha x,\ x+y+z,\ -x).$$
$$=(\alpha^2 x,\ \alpha x+x+y+z-x,\ -\alpha x).$$
$$=(\alpha^2 x,\ \alpha x+y+z,\ -\alpha x).$$

Donc : $h\circ h(x,y,z)=h(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2=\alpha \\ \text{et} \\ \alpha=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \text{ (Rejeté)}. \\ \text{ou} \\ \alpha=1. \end{cases}$

$\rightarrow h\circ h=h \Leftrightarrow \underline{\alpha=1}$.

3/ On note : $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \longmapsto (x,\ x+y+z,\ -x)$$

P est appelé un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

• $\operatorname{Ker} P = \{(x,y,z) \,/\, P(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$= \{(x,y,z) \,/\, (x, x+y+z, -x) = (0,0,0)\}$.

$= \{(x,y,z) \,/\, x = 0 \text{ et } y = -z\}$.

$= \{(0,-z,z) \,/\, z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,-1,1) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$.

$= \operatorname{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (0,-1,1)$.

$=$ s.e.v. engendré par (e_1).

Comme $e_1 \neq 0$ donc (e_1) est libre et (e_1) est une base de $\operatorname{Ker} P$.

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\operatorname{Ker} P) = 1.}$$

• $\operatorname{Im} P = \{P(x,y,z) \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.

$= \{(x, x+y+z, -x) \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{x(1,1,-1) + y(0,1,0) + z(0,1,0) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

$= \{x(1,1,-1) + (y+z)(0,1,0) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

$= \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ où $e_2 = (1,1,-1)$, $e_3 = (0,1,0)$.

Il est facile de vérifier que (e_2,e_3) est libre donc (e_2,e_3) est une base de $\operatorname{Im} P$.

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\operatorname{Im} P) = 2}.$$

- $\operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P = \mathbb{R}^3 \iff \begin{cases} a/ \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P = \{0_{\mathbb{R}^3}\}. \\ b/ \operatorname{Ker} P + \operatorname{Im} P = \mathbb{R}^3. \end{cases}$

a/ Soit $X = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P \iff P(X) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $\exists T \in \mathbb{R}^3 / P(T) = X$.

$\Rightarrow P(P(T)) = 0_{\mathbb{R}^3}$ c'est à dire $(P \circ P)(T) = P(T) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Donc : $X = (x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

et $\operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

b/ En utilisant la formule de Grassmann, on a :

$\dim(\operatorname{Ker} P + \operatorname{Im} P) = \dim(\operatorname{Ker} P) + \dim(\operatorname{Im} P) - \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P)}_{=0}$.

$= 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Donc : $\begin{cases} \operatorname{Ker} P + \operatorname{Im} P \subset \mathbb{R}^3 \\ \quad \text{et} \\ \dim(\operatorname{Ker} P + \operatorname{Im} P) = \dim(\mathbb{R}^3) \end{cases} \iff \operatorname{Ker} P + \operatorname{Im} P = \mathbb{R}^3$.

Conclusion : $\operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P = \mathbb{R}^3$.

Fin.

Résultat : P est un projecteur de $\mathbb{R}^3 \iff \begin{cases} 1/ P \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3. \\ \quad \wedge \\ 2/ P \circ P = P. \end{cases}$