**Université A. Mira de Bejaia** | **Année Universitaire 2025/2026**
**Département de technologie** | **Durée : 1h30**
**1ère année TC Ingénieur (ST-TM)** | **Avril 2026**

## Examen de Rattrapage d'Eléments de Mécanique (Physique 1)

**<u>Exercice 1 :</u> (08.50 pts)**

Les coordonnées cartésiennes d'un mobile $M$ se déplaçant dans le plan $(OXY)$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(\omega t) + c \\ y(t) = 2\sin(\omega t) + d \end{cases} \; ; \text{ où } \omega, c \text{ et } d \text{ sont des constantes positives}$$

**1.** Trouver l'équation cartésiennes de la trajectoire du mobile et sa nature.

**2.** En utilisant l'analyse dimensionnelle, déterminer les dimensions de la constante $c$.

**3.** On prend $c = d = 0$ :

3.1. Déterminer les composantes $v_x$ et $v_y$ et le module $(v)$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction du temps.

3.1 Déterminer les composantes $a_x$ et $a_y$ et le module $(a)$ du vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction du temps.

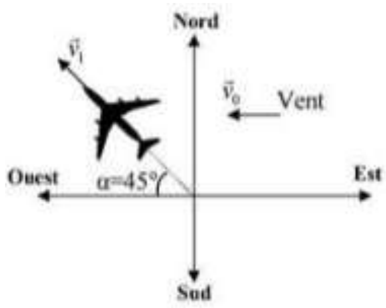
3.2 Trouver les expressions des accélérations normale $(a_n)$ et tangentielle $(a_t)$ du vecteur accélération $\vec{a}$. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire. Quelle est la nature du mouvement de $M$ ?

3.3 Ecrire les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ de la base intrinsèque dans la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3.4 Donner les coordonnées polaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$ du mobile $M$.

**<u>Exercice 2 :</u> (03.50 pts)**

Un avion se dirige vers le nord-ouest, suivant une direction faisant un angle 45° avec l'axe de l'ouest, avec une vitesse $v_1 = 125\ km/h$ par rapport à un observateur lié à la terre. Le vent souffle vers l'ouest avec une vitesse $v_0 = 50\ km/h$ par rapport au même observateur (voir la Figure ci-contre). On note $\vec{v}_2$ la vitesse de l'avion par rapport au vent.



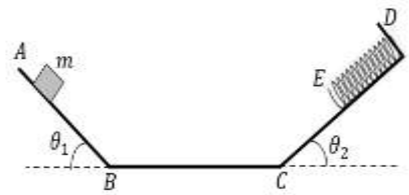

**1.** Identifier les différents éléments de ce mouvement relatif : Référentiel absolu, référentiel relatif, le mobile et les vitesses absolue $\vec{v}_a$, relative $\vec{v}_r$ et d'entrainement $\vec{v}_e$. Faire un schéma.

**2.** Trouver la norme de la vitesse $\vec{v}_2$.

**<u>Exercice 3 :</u> (08 pts)**

Une boîte de masse $m = 1{,}5\ kg$ est lancée depuis le point $A$ avec une vitesse initiale $v_A = 5\ m/s$ le long d'une piste $ABCD$. En bout de piste, un ressort de raideur $k = 800\ N/m$ est fixé au mur en $D$. Le point $E$ désigne l'extrémité libre du ressort au repos (Figure ci-contre) . On donne : $g = 10\ m.s^{-2}$

**Partie I : Plan incliné descendant $AB$ ($\theta_1 = 30°, AB = 4m,\ \mu_{d1} = 0,3$)**




Représenter les forces appliquées à la boîte sur $AB$. Calculer l'accélération $a_1$ de la boîte sur $AB$. La boîte accélère-t-elle ou ralentit-elle ? Justifier votre réponse. En déduire la vitesse $v_B$ au bas du plan.

**Partie II — Piste horizontale $BC$ (lisse (sans frottement), $BC = 3\ m$)**

Justifier rigoureusement que le mouvement sur $BC$ est uniforme. Quelle est la valeur de $v_C$?

**Partie III — Plan incliné ascendant $CED$ ($\theta_2 = 37°, CE = 2m$, lisse, $\mu_{d2} = 0,2$ sur ED)**

**a.** Représenter les forces appliquées à la boîte sur la portion $CE$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, calculer l'accélération $\vec{a}_2$ de la boîte sur $CE$. En déduire la vitesse $v_E$ de la boîte au point $E$.

**b.** Sur la portion $ED$, la boîte comprime le ressort d'une longueur $x_m$ avant de s'arrêter en $P$. Représenter les forces appliquées à la boîte entre $E$ et $P$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, et en utilisant la relation $a = (d^2x/dt^2)$, montrer que l'équation différentielle du mouvement se présente sous la forme : $d^2x/dt^2 + \alpha x + \beta = 0$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes à déterminer en fonction de $m, g, k, \theta_2, \mu_{d2}$.

**<u>Bon courage</u>**

# Corrigé

## Exercice 1 : (08.50 points)

1. L'équation cartésiennes de la trajectoire du mobile et sa nature :

$$(x-c)^2+(y-d)^2=4 \ \ (\mathbf{0.5})$$

La trajectoire de $M$ est un cercle de centre $P(c,d)$ et de rayon $R=2$ $(\mathbf{0.5})$.

2. Les dimensions de la constante $c$ :

$$[c]=[x]=L \ (\mathbf{0.50})$$

3. On prend $c=d=0$ :

3.1. Les composantes $v_x$ et $v_y$ et le module $(v)$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction du temps :

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-2\omega\sin(\omega t) \ \ (\mathbf{0.50});\ v_y=\frac{dy}{dt}=2\omega\cos(\omega t) \ \ (\mathbf{0.50})$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=2\omega \ \ (\mathbf{0.50})$$

3.2. Les composantes $a_x$ et $a_y$ et le module $(a)$ du vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction du temps :

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=-2\omega^2\cos(\omega t) \ \ (\mathbf{0.50});\ v_y=\frac{dy}{dt}=-2\omega^2\sin(\omega t) \ \ (\mathbf{0.50})$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=2\omega^2 \ \ (\mathbf{0.50})$$

3.3. Les expressions des accélérations normale $(a_n)$ et tangentielle $(a_t)$ du vecteur accélération $\vec{a}$. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire

$$a_t=\frac{dv}{dt}=0 \ \ (\mathbf{0.50});\ a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=a=2\omega^2 \ \ (\mathbf{0.50})$$

$$R_c=\frac{v^2}{a_n}=2 \ \ (\mathbf{0.50})$$

La nature du mouvement de $M$ :

La trajectoire est un cercle et $a_t=0$ $(v=cste)$. Donc, le mouvement de $M$ est circulaire uniforme $(\mathbf{0.50})$.

3.4. Les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ de la base intrinsèque dans la base cartésienne $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ :

$$\vec{u}_t=\frac{\vec{v}}{v}=-\sin(\omega t)\,\vec{\imath}+\cos(\omega t)\,\vec{\jmath} \ \ (\mathbf{0.50})$$

$$\vec{a}=a_t\vec{u}_t+a_n\vec{u}_n=a_n\vec{u}_n\rightarrow\vec{u}_n=\frac{\vec{a}}{a_n}=-\cos(\omega t)\,\vec{\imath}-\sin(\omega t)\,\vec{\jmath} \ \ (\mathbf{0.50})$$

3.5. Les coordonnées polaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$ du mobile $M$.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=2 \ (\mathbf{0.50})$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\omega t \ (\mathbf{0.50})$$

## Exercice 2 : (03.50 points)

1. Identifier les différents éléments de ce mouvement relatif :

Référentiel absolu : la terre, référentiel relatif : le vent, le mobile : l'avion $(\mathbf{0.25})$

La vitesses absolue $\vec{v}_a$ : vitesse de l'avion par rapport à la terre $\vec{v}_a=\vec{v}_1$ $(\mathbf{0.25})$

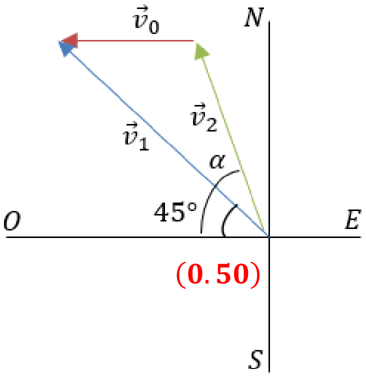
La vitesse relative $\vec{v}_r$ : vitesse de l'avion par rapport au vent $\vec{v}_r=\vec{v}_2$ $(\mathbf{0.25})$

La vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$ : vitesse du vent par rapport à la terre $\vec{v}_e=\vec{v}_0$ $(\mathbf{0.25})$

2. La norme et la direction (angle $\alpha$ par rapport à l'axe de l'ouest) de la vitesse $\vec{v}_2$ :

Loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_0 \rightarrow \vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 \quad (\mathbf{0.50})$$




$(\mathbf{0.50})$

En termes de composantes :

$$v_{2x} = v_{1x} - v_{0x} = v_1\cos(45°) - v_0 = 38.4\ km/h \quad (\mathbf{0.50})$$

$$v_{2y} = v_{1y} - v_{0y} = v_1\sin(45°) = 88.4\ km/h \quad (\mathbf{0.50})$$

Par conséquent :

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 96.4\ km/h \quad (\mathbf{0.50})$$

Il est également possible d'établir ce résultat en utilisant la relation $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$ et les propriétés du produit scalaire : $v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_0^2 - 2v_0v_1\cos(45°)}$

**Exercice 3 : (08 points)**

**Partie I — Plan incliné $AB$ ($\theta_1 = 30°, \mu_{d1} = 0,3, AB = 4\ m$)**

D'après le principe fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{d1} = m\vec{a}_1 \ (\mathbf{0.25})$$

Projections : $\begin{cases} (Ox) :\ P_x - f_{d1} = ma_1 \ \ (\mathbf{0.25}) \\ (Oy) : R - P_y = 0 \ \ (\mathbf{0.25}) \end{cases}$

Force de frottement : $f_{d1} = \mu_{d1}R = \mu_{d1}P_y = \mu_{d1}P\sin\theta_1 \quad (\mathbf{0.50})$

Par conséquent, l'accélération est donnée par :

$$a_1 = \frac{P_x - f_{d1}}{m} = g(\sin\theta_1 - \mu_{d1}\sin\theta_1) = 2.39\ m.s^{-2} \quad (\mathbf{0.50})$$

L''accélération $a_1$ est constante et positive, donc la boîte est uniformément accélérée sur AB $(\mathbf{0.25})$.

Vitesse en $B$ :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a_1(AB) \rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2a_1(AB)} = 6.64\ m.s^{-1} \quad (\mathbf{0.50})$$

**Partie II — Piste horizontale $BC$ (lisse, $BC = 3\ m$)**

Bilan des forces : Poids $\vec{P}$ et réaction normale $\vec{R}$ s'équilibrent verticalement. Aucune force de frottement (lisse). Donc la résultante des forces est nulle $(\mathbf{0.50})$.

D'après le principe fondamental de la dynamique : $\vec{a} = \vec{0}$, le mouvement est rectiligne uniforme $(\mathbf{0.25})$.

$$v_C = v_D = 6.64\ m.s^{-1} \quad (\mathbf{0.25})$$

**Partie III — Plan incliné $CED$ ($\theta_2 = 37°$)**

a. Vitesse $v_E$ ($CE = 2\ m$, lisse)

D'après le principe fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_2 \ \ \color{red}{(\mathbf{0.25})}$$

Projections : $\begin{cases} (Ox) : \ -P_x = ma_2 \ \ \color{red}{(\mathbf{0.25})} \\ (Oy) : R - P_y = 0 \ \ \color{red}{(\mathbf{0.25})} \end{cases}$

Par conséquent, l'accélération est donnée par :

$$a_2 = -\frac{P_x}{m} = -g\sin\theta_2 = -6m.s^{-2} \ \ \color{red}{(\mathbf{0.50})}$$

L'accélération $a_2$ et constante et négative. Le mouvement de la boite est uniformément décéléré.

Vitesse en $E$ :

$$v_E^2 - v_C^2 = 2a_2(CE) \rightarrow v_E = \sqrt{v_C^2 + 2a_2(CE)} = 4.48\ m.s^{-1} \ \ \color{red}{(\mathbf{0.50})}$$

b. Compression du ressort — de E à P ($\mu_{d2} = 0{,}2, k = 800\ N.m^{-1}$)

D'après le principe fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{d2} + \vec{F}_e = m\vec{a} \ \ \color{red}{(\mathbf{0.25})}$$

Projections : $\begin{cases} (Ox) : \ -P_x - f_{d2} - kx = ma\ (1) \ \ \color{red}{(\mathbf{0.25})} \\ \qquad (Oy) : R - P_y = 0 \ \ \color{red}{(\mathbf{0.25})} \end{cases}$

Force de frottement : $f_{d2} = \mu_{d2}R = \mu_{d2}P_y = \mu_{d2}P\sin\theta_2 \ \ \color{red}{(\mathbf{0.50})}$

En remplaçant dans l'équation (1), on trouve :

$$-mg\sin\theta_2 - \mu_{d2}mg\sin\theta_2 - kx = ma \rightarrow a = -\frac{k}{m}x - g(\sin\theta_2 + \mu_{d2}\sin\theta_2) \ \ \color{red}{(\mathbf{0.50})}$$

En utilisant la relation $a = (d^2x/dt^2)$, on trouve ;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + g(\sin\theta_2 + \mu_{d2}\sin\theta_2) = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \beta = 0 \ \ \color{red}{(\mathbf{0.25})}$$

D'où les valeurs des constantes :

$$\alpha = \frac{k}{m} = 533.33\ s^{-2} \ \ \color{red}{(\mathbf{0.25})}$$

$$\beta = g(\sin\theta_2 + \mu_{d2}\sin\theta_2) = 7.21\ m.s^{-2} \ \color{red}{(\mathbf{0.25})}$$