

Série de T.D. N°02 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 01 : Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $(x + 1)y' + y = 0$.
2. $y' = \frac{y + 1}{x}$ et $y(1) = 0$

Exercice 02 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$.
2. $x^2y' - (2x - 1)y = x^2$ et $y(1) = 1$.
3. $y' + xy = xy^2$.

Exercice 03 : Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
3. $y'' + y' + y = 0$.

Exercice 04 : Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
2. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$.
3. $y'' - 2y' = \sin x$.

Série de T.D. N°02 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 01 : Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $(x + 1)y' + y = 0 \dots (E_1)$.

On remarque que $y = 0$ est une solution triviale de (E_1) .

Si $y \neq 0$ on a :

$$(x + 1)y' + y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)\frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + 1}$$

en séparant les variables, on a

$$\frac{dy}{y} = \frac{-1}{x + 1}dx,$$

d'où en intégrant le côté gauche par rapport à y et le côté droit par rapport à x , on obtient

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{1}{x + 1}dx \Rightarrow \ln |y| = - \ln |x + 1| + C = \ln \frac{1}{|x + 1|} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

et par suite

$$|y| = \frac{1}{|x + 1|}e^C \Rightarrow y = \pm e^C \frac{1}{x + 1} \Rightarrow y = \frac{k}{x + 1}, \text{ avec } k = \pm e^C.$$

Donc

$$y(x) = \frac{k}{x + 1}, \text{ avec } k = \pm e^C$$

est la solution générale de (E_1) .

2. $y' = \frac{y+1}{x} \quad (E2)$

$$(E2) \Rightarrow \frac{y'}{y + 1} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y + 1} = \int \frac{dx}{x} \quad \text{Donc}$$

$$\Rightarrow \ln |y + 1| = \ln |x| + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow y + 1 = \pm e^{\ln |x| + k}, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow y = ce^{\ln |x|} - 1, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow y = cx - 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = cx - 1, \quad c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (E2). Pour le problème de Cauchy on a :

$$y(1) = 0 \Rightarrow c = 1$$

Donc

$$y(x) = x - 1,$$

est la solution du problème de Cauchy.

Exercice 02 : Résolvons les équations différentielles du premier ordre suivantes :

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^x} \dots (E_1)$$

(E₁) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à (E₁) est

$$y' + y = 0 \dots (EH_1)$$

Résolution de l'équation homogène :

On remarque que $y = 0$ est une solution triviale de (EH₁).

Si $y \neq 0$ on a

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

alors en intégrant des deux cotés on obtient

$$\ln |y| = -x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

d'où

$$y = ke^{-x}, \text{ où } k = \pm e^C \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale de (EH₁) est

$$y(x) = ke^{-x}.$$

La variation de la constante

On fait varier la constante k , on a alors

$$y'(x) = k'e^{-x} - ke^{-x}$$

puis on remplace y et y' dans (E₁) on obtient

$$k'e^{-x} - ke^{-x} + ke^{-x} = \frac{1}{1 + e^x}$$

et par suite

$$k' = \frac{e^x}{1 + e^x} \Leftrightarrow dk = \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

d'où en intégrant on a

$$\int dk = \underbrace{\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx}_{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx} \Leftrightarrow k = \ln(e^x + 1) + c.$$

par conséquent

$$y(x) = (\ln(e^x + 1) + c)e^{-x}, c \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de (E_1) .

2. Résolution de l'équation différentielle suivante :

$$x^2y' - (2x - 1)y = x^2 \quad (E_2)$$

L'équation homogène associée est

$$x^2y' - (2x - 1)y = 0 \quad (EH_2)$$

On suppose que $y \neq 0$

$$(EH_2) \Rightarrow x^2y' = (2x - 1)y$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x - 1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x - 1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \int \frac{2x}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x^2| + \frac{1}{x} + k, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{\ln|x^2| + \frac{1}{x} + k}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = ce^{\ln|x^2| + \frac{1}{x}}, c = \pm e^k, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = cx^2e^{\frac{1}{x}}, c \in \mathbb{R}$$

Alors

$$y(x) = cx^2e^{\frac{1}{x}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (EH_2) .

On utilise la méthode de variation de la constante : On pose :

$$y(x) = c(x)x^2e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = c'(x)x^2e^{\frac{1}{x}} + c(x)(2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$$

En remplaçant y et y' dans (E_2) on obtient :

$$(E_2) \Rightarrow x^2c'(x)x^2e^{\frac{1}{x}} + x^2c(x)(2x - 1)e^{\frac{1}{x}} - (2x - 1)c(x)x^2e^{\frac{1}{x}} = x^2$$

$$\Rightarrow c'(x)x^2e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\Rightarrow c'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}, \left(\text{on fait le changement de variable } t = \frac{-1}{x} \right)$$

$$\Rightarrow c(x) = e^{\frac{-1}{x}} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Alors

$$y(x) = x^2 + \lambda x^2e^{\frac{1}{x}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (E_2) . Pour le problème de Cauchy on a :

$$y(1) = 1 \Rightarrow \lambda = 0$$

Donc

$$y(x) = x^2,$$

est la solution du problème de Cauchy.

3. *Résolution les équations différentielles non linéaires du premier ordre suivantes:*

3. $y' + xy = xy^2.$ (E3)

On remarque que c'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, alors on divise l'équation (E3) par y^2 en supposant que $y \neq 0$ car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{x}{y} = x, \quad (E'3)$$

puis on fait le changement de variable suivant

$$z = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2},$$

ensuite on remplace dans (E'3) et on obtient

$$-z' + xz = x$$

qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre par la méthode de séparation des variables (ou par la méthode de la variation de la constante) comme suit:

$$-z' + xz = x \Leftrightarrow \frac{z'}{z-1} = x \Leftrightarrow \frac{dz}{z-1} = x dx$$

on suppose que $z \neq 1$ car $z = 1$ est une solution triviale de l'équation, d'où

$$\ln |z - 1| = \frac{x^2}{2} + c' \Leftrightarrow z = K e^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

donc

$$y_g = \frac{1}{K e^{\frac{x^2}{2}} + 1}$$

Exercice 03 : Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes : 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ (équation homogène).

Equation caractéristique:

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

On a $\Delta = 1 > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. D'où

$$y_h = C_1 e^{1x} + C_2 e^{2x}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Equation caractéristique:

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

On a $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une solution double $r = -2$. D'où

$$y_h = (C_1 x + C_2) e^{-2x}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $y'' + y' + y = 0$.

Equation caractéristique:

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

On a $\Delta = -3 < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes et conjuguées

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ et } r_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}. \text{ D'où}$$

$$e^{\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right); C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 04 : Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes : 1.

$$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x} \dots\dots (E_1) \quad y(0) = y'(0) = 0$$

L'équation homogène associée à (E_1) est

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \dots\dots (EH_1)$$

L'équation caractéristique de (EH_1) est

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \dots\dots\dots (EC_1)$$

On a $\Delta = 4 > 0$, d'où l'équation (EC_1) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Les solutions de l'équation homogène (EH_1) sont donc les fonctions :

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_1) :

On a le second membre de l'équation (E_1) est

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}$$

Comme $r = -1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax + b)e^{-x}.$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$y'_p(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}; y''_p = -2ae^{-x} + (ax + b)e^{-x}$$

En substituant dans l'équation (E_1) les expressions de y_p, y'_p et de y''_p ; on obtient

$$(E_1) \implies (8ax + 8b - 6a)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x}.$$

Par identification, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{16} \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_1) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= C_1e^x + C_2e^{3x} + \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_1) .

Pour le problème de Cauchy, on a

$$y(0) = 0 \implies \frac{5}{16} + A + B = 0 \dots\dots$$

On a aussi

$$y'(x) = \left(\frac{-1}{4}x + \frac{-1}{16}\right) e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x}.$$

D'où

$$y'(0) = 0 \implies \frac{-1}{16} + A + 3B = 0 \dots\dots\dots$$

De (1) et (2), on a

$$\begin{cases} \frac{5}{16} + A + B = 0 \\ \frac{-1}{16} + A + 3B = 0, \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = \frac{3}{16}. \end{cases}$$

Finalement,

$$y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{16}e^{3x},$$

est la solution de problème du Cauchy. 2.

$$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x \dots\dots(E_2)$$

L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque cette fois que $r = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = x(ax + b)e^x.$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$y_p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x; y_p'' = (2a + 2b + 4ax + ax^2 + bx)e^x.$$

En substituant dans l'équation (E_2) les expressions de y_p, y_p' et de y_p'' ; on obtient

$$(E_2) \implies (-4ax + 2a - 2b)e^x = (2x + 1)e^x.$$

Par identification, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} -4a = 2 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_2) est

$$y_p(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) e^x.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) e^x; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_2) .

$$y'' - 2y' = \sin x.$$

$$y'' - 2y' = \sin x \dots \dots (E_3)$$

Solution : L'équation homogène associée à (E_3) est

$$y'' - 2y' = 0 \dots \dots (E_3 \cdot H)$$

L'équation caractéristique de $(E_3 \cdot H)$ est

$$r^2 - 2r = 0 \dots \dots (E_3 \cdot C)$$

Les racines de l'équation $(E_3 \cdot C)$ sont : $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de $(E_3 \cdot H)$ est

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x} + Be^{2x} \\ &= A + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_3) : On a le second membre de l'équation (E_3) est

$$f(x) = \sin x = \sin(1x)e^{0x}.$$

Comme $0 + 1i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique ($E_3.C$), donc on cherche une solution particulière y_p de l'équation (E_3) sous la forme

$$y_p(x) = a \sin x + b \cos x, a, b \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_p'(x) = a \cos x - b \sin x \text{ et } y_p''(x) = -a \sin x - b \cos x.$$

En substituant dans l'équation (E_3) les expressions de y_p, y_p' et de y_p'' , on obtient

$$\begin{aligned} (E_3) &\Rightarrow -a \sin x - b \cos x - 2(a \cos x - b \sin x) = \sin x \\ &\Rightarrow (-a + 2b) \sin x + (-b - 2a) \cos x = \sin x \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ -b - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Donc une solution particulière y_p de l'équation (E_3) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A + Be^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x, A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de (E_3).