EXO 1

(1)

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\,dx$$

On pose : $t = e^x$

$$dt = e^x dx$$

$$dx = \frac{dt}{e^x}$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

0,5

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = e$

$$I_1 = \int_1^e \frac{t^2}{t+1} \times \frac{dt}{\cancel{t}}$$

02

$$= \int_1^e \frac{t}{t+1}\,dt$$ 0,5

$$= \int_1^e \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \left[t - \ln(t+1)\right]_1^e$$ 0,5

$$= e - \ln(e+1) - 1 + \ln(2)$$

$$= e - 1 + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$$ 0,5

$$I_2 = \int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx$$ 0,5

on pose $t = x+1$

$dt = dx$

$x = -1 \Rightarrow t = 0$

$x = -1+\sqrt{2} \Rightarrow t = \sqrt{2}$

0,5

02

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2+2}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{2}}$$ 0,5

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(1) - \arctan(0)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$ 0,5

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

(2)

* la fct $x \mapsto \frac{x^3+2x+2}{x^2+1}\, e^{-x}$ continue et positive sur $[0,+\infty[$ 0,1

et $\frac{x^3+2x+2}{x^2+1} \sim_{+\infty} \frac{x^3}{x^2} = x$ 0,1

$$\frac{x^3+2x+2}{x^2+1}\, e^{-x^2} \sim_{+\infty} x\, e^{-x^2}$$

02

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^x$$ 0,1

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (CV)}$$ 0,1

alors d'après le critère d'équivalence $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+2x+2}{x^2+1} e^{-x^2} dx$ CV

* $I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{e^x-1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \times \cos(x)\, dx$

la fct $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ contin ; positive et décroissante sur $[1;+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} = 0$ 01 02

$$\left| \int_1^x \cos(t)\, dt \right| = |\sin(x) - \sin(1)| \leq |\sin x| + |\sin(1)| \leq 2$$

Dc $\exists M = 2 > 0$ tq $\forall x \in [1,+\infty[$; $\left|\int_1^x \cos(t)\, dt\right| \leq M = 2$

Alors d'après le critère d'Abel : 01

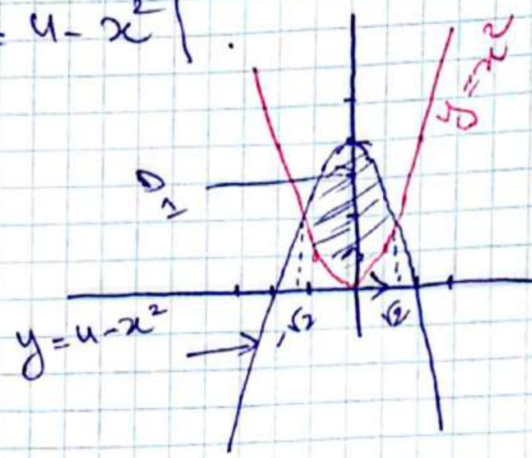
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{e^x-1}} dx \text{ CV.}$$

EXO2 :

1. $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

a)

(1)



b) l'aire (D_1) :

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} ; \ x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}.$$

(1)

$$\text{Aire}(D_1) = \iint_{D_1} dx\,dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\int_{x^2}^{4-x^2} dy \right] dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)\, dx = \left[4x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ u.a}$$

$$\text{Aire}(D_1) = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ u.a}$$

2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 ; \ y \geq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad |J| = r$$

0,5

$$\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\}.$$

(2)

$$I_1 = \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\,dy = \iint_\Delta \frac{\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}} \cdot r\,dr\,d\theta$$

0,5

$$= \int_1^2 r\,dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

page (3)

$$= \left[\frac{1}{2}r^2\right]_1^2 \times \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}$$

0,5 0,5

* $J_2 = \iiint\limits_V z^2 \, dx\, dy\, dz$

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 ;\ y \geq 0 ;\ z \geq 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \qquad |J| = r^2\cos\varphi .$$

0,5

$\Delta = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 3 ;\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} ;\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$.

02

$$J_2 = \iiint\limits_\Delta r^2\sin^2\varphi \cdot r^2\cos\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^3 r^4\, dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi \, d\varphi$$

0,5

$$= \left[\tfrac{1}{5} r^5\right]_0^3 \times \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81\pi}{10}$$

0,5 0,5

* $J_3 = \iiint\limits_V z \ln(1+x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad |J| = r$$

0,5

$\Delta' = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 3 ;\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} ;\ 0 \leq z \leq \sqrt{9-r^2}\}$

$$J_3 = \iiint\limits_{\Delta'} z \ln(1+r^2)\, r\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \times \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-r^2}} r z \ln(1+r^2)\, dz\right] dr$$

0,25

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^3 \frac{1}{2} r(9-r^2)\ln(1+r^2)\, dr$$

$$J_3 = \frac{\pi}{4}\int_0^3 (9r - r^3)\ln(1+r^2)\,dr \quad \text{(par partie)}$$

$$u(r) = \ln(1+r^2) \Longrightarrow u'(r) = \frac{2r}{1+r^2}$$

$$v'(r) = 9r - r^3 \Longrightarrow v(r) = \frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4$$

0,25

$$J_3 = \frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\ln(1+r^2) - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{18r^3 - r^5}{1+r^2}\,dr\right)$$

0,5

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{81}{4}\ln(10) - \frac{1}{2}\int_0^3\left(-r^3 + 19r - \frac{19}{2}\cdot\frac{2r}{r^2+1}\right)dr\right)$$

0,5

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{81}{4}\ln(10) - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}r^4 + \frac{19}{2}r^2 - \frac{19}{2}\ln(r^2+1)\right]_0^3\right)$$

02

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{81}{4}\ln(10) - \frac{1}{2}\left(\frac{261}{4} - \frac{19}{2}\ln(10)\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(25\ln(10) - \frac{261}{8}\right).$$

0,25

③ a $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$

0,5

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2} \Longrightarrow \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

0,5 02

D'après le critère de Cauchy $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$ DIV

0,5 0,5

*
$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n^n\, n!}$$

$$u_n = \frac{e^{-n}}{n^n\, n!} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{e^{-n-1}}{(n+1)^{n+1}\,(n+1)!} = \frac{e^{-n}\cdot e^{-1}}{(n+1)^2\cdot(n+1)^n\cdot n!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{e^{-n}}\cdot e^{-1}}{(n+1)^2(n+1)^n\cdot \cancel{n!}} \times \frac{n^n\cdot \cancel{n!}}{\cancel{e^{-n}}}$$ 0,5

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1}}{(n+1)^2}\times\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{e^{-1}}{(n+1)^2}}_{\to 0}\cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\to e}$$ 0,5

$$= 0$$ 0,5

D'après le critère d'Alambert $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n^n\cdot n!}$ CV

0,5

02

Maths 3

Université de A.MIRA de Béjaïa
Faculté de Technologie
Département ATE — L_2
Durée : 01H30

® 2025–2026

✠–Examen de Rattrapage — Mathématiques 3–✠

Exercice 1 (08.00 points) :

1. Calculer les intégrales simples suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{-1+\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx.$$

2. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x^3+2x+2}{x^2+1}\,e^{-x^2}\,dx \quad \text{et} \quad I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{e^x-1}}\,dx.$$

Exercice 2 (12.00 points) :

1. Soit $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$.
   (a) Tracer le domaine D_1.
   (b) Calculer l'aire de D_1.
2. Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0;\ y \geq 0 \text{ et } 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ et

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq 9\}.$$

▷ Calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy; \quad J_2 = \iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz \quad \text{et } J_3 = \iiint_V z\ln\left(1+x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz.$$

3. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n^n\,n!}.$$

Une rédaction précise, claire et rigoureuse est requise.

Bonne Chance