Suite de l'exercice 2

le domaine (D) est une figure plane limité par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Afin de calculer, facilement, Aire (D) on utilise le changement de variable suivant :

$$x = 2r\cos\theta \ , \quad y = 3r\sin\theta$$

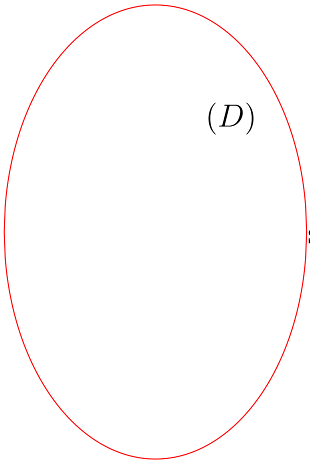
L'équation $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ en coordonnées (r,θ) prend la forme $r=1$ (sans oublier que θ est quelconque). Autrement dit, le changement de variable sus-cité transforme le domaine (D) en disque (D') de rayon 1.

Aire $(D) = \int\int_D dxdy = \int\int_{D'} |J| dr d\theta$, avec $j = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = 6r$, ce qui donne :

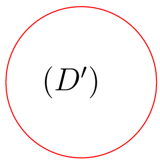
Aire (S)=Aire $(D) = \int\int_D dxdy = \int\int_{D'} |J| dr d\theta = 6\text{Aire}(D') = 6\pi$.

Avec le changement de variable

$$x = 2r\cos\theta \ , \quad y = 3r\sin\theta$$



se transforme en

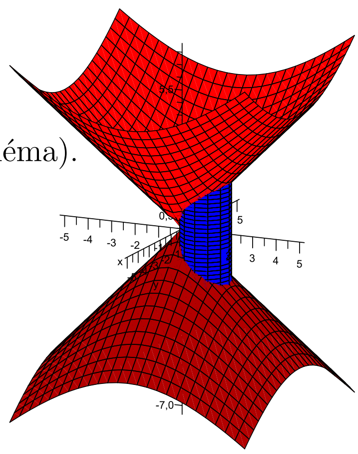


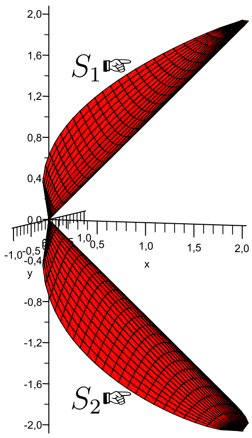
l'aire de la partie du cone $x^2+y^2=z^2$ découpée par le cylindre $x^2+y^2=2x$.

La surface en rouge désigne le cone $x^2+y^2=z^2$

La surface en bleu désigne le cylindre $x^2+y^2=2x$.

Le cylindre coupe le cone en deux surfaces S_1 et S_1 (voir le schéma).





La projection de S_1 sur le plan (OXY) est un disque D de centre $(1,0)$ de rayon 1.

il suffit de remarquer :

$$x^2 + y^2 = 2x \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

S_1 est définie par $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

S_2 est définie par $z = g(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$

$$\text{Aire}(S_1) = \text{Aire}(S_1) = \int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy = \sqrt{2}.(\text{Aire de disque D}) = \sqrt{2}\pi.$$

Exercice 3 **(solutions)**
coordonnées du centre de gravité de la figure (A) définie par :

(A)=$\left\{(x,y) \text{ tel que } -2 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$.

Notons par $G\,(x_G,\ y_G)$ le centre de gravité de (A) tel que :

$$x_G = \frac{\displaystyle\int\int_{(A)} xdxdy}{\displaystyle\int\int_{(A)} dxdy} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\displaystyle\int\int_{(A)} ydxdy}{\displaystyle\int\int_{(A)} dxdy}$$

La figure (A) est un demi disque de centre (0, 0) de rayon 2. En coordonnées cartésiennes :

$$x_G = \frac{\displaystyle\int\int_{(A)} xdxdy}{\displaystyle\int\int_{(A)} dxdy} = \frac{\displaystyle\int_{-2}^{2}\left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xdy\right]dx}{\text{Aire}(A)}$$

$$y_G = \frac{\displaystyle\int\int_{(A)} ydxdy}{\displaystyle\int\int_{(A)} dxdy} = \frac{\displaystyle\int_{-2}^{2}\left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} ydy\right]dx}{\text{Aire}(A)}$$

En coordonnées polaires :

$$x_G = \frac{\displaystyle\int\int_{(A')} r\cos\theta |J| drd\theta}{\displaystyle\int\int_{(A)} |J| drd\theta} = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi}\left[\int_0^2 r^2\cos\theta dr\right]d\theta}{\text{Aire}(A)} = 0$$

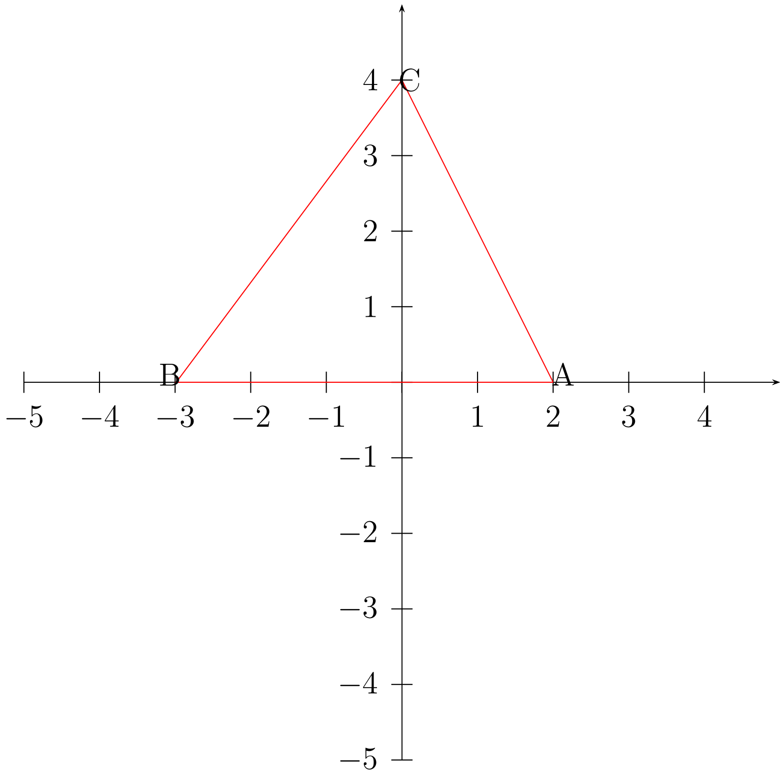
$$y_G = \frac{\displaystyle\int\int_{(A')} r\sin\theta |J| dr d\theta}{\displaystyle\int\int_{(A)} |J| dr d\theta} = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi}\left[\int_0^2 r^2 \sin\theta dr\right] d\theta}{\text{Aire}(A)} = \frac{8}{3\pi}$$

2) Coordonnées du centre de gravité de la plaque triangulaire de sommets $A(2,0)$, $B(-3,0)$, $C(0,4)$.

On a, $(AC):\quad y = -2x+4$ et $(BC):\quad y = \frac{4}{3}x+4$. l'aire de la figure ci dessous $= 10$.

$$x_G = \frac{\displaystyle\int\int_{(A)} x dx dy}{\displaystyle\int\int_{(A)} dx dy} = \frac{\displaystyle\int_0^4\left[\int_{\frac{-1}{2}(y-4)}^{\frac{3}{4}(y-4)} x dx\right] dy}{10}$$

$$y_G = \frac{\displaystyle\int\int_{(A)} y dx dy}{\displaystyle\int\int_{(A)} dx dy} = \frac{\displaystyle\int_0^4\left[\int_{\frac{-1}{2}(y-4)}^{\frac{3}{4}(y-4)} y dx\right] dy}{10}$$



Moment d'inertie de l'aire du rectangle limité par l'ellipse $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$:

a) <u>par rapport à l'axe (OY)</u>

$I_y = \displaystyle\int\int_{(A)} x^2 dxdy$, où (A) désigne le domaine limité par l'ellipse $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

En posant $x = r\cos\theta$ et $y = 2r\sin\theta$, ce changement de variable transforme l'ellipse en un cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1.

$I_y = \displaystyle\int\int_{(A)} x^2 dxdy = \int\int_{(A')} (r\cos\theta)^2 |J| drd\theta$ où (A') désigne le disque de centre $(0, 0)$ de rayon 1.

$I_y = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 2r^3(\cos\theta)^2 dr\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta$, $(|J| = 2r)$

Indication : $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$.

b)<u>par rapport à l'origine des coordonnées.</u>

$I_O = \displaystyle\int\int_{(A)} (x^2 + y^2) dxdy = \int\int_{(A')} r^2(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)|J| drd\theta$

$I_O = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 2r^3(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta) dr\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta\right) d\theta.$

Chargé de cours.

Mr :Bedhouche.