Université A. MIRA -Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Siences et Technologie

Année universitaire 2025-2026
Algèbre 2
1ère année ST-LMD

Série de TD n° 02 : Matrices et déterminants

I On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 23 \\ 0 & -5 \\ -13 & 40 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 2}}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & \cdots & 91 \\ \cdots & -1 & \cdots \\ 21 & \cdots & 19 \end{pmatrix} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 3}}.$$

1. Donner le type (l'ordre,la taille) des matrices A et B
2. Donner la valeur de chacun de ces éléments de A : a_{12}, a_{21} et a_{32}.
3. Compléter l'écriture de la matrice B avec : $b_{32} = -4$, $b_{21} = 11$, $b_{23} = \sqrt{3}$ et $b_{12} = \frac{7}{5}$.
4. Ecrire la matrice transposée A^t et donner sa taille. Même question pour la matrice B.

II Trouver les éléments de la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 2}}$ telles que :

$$c_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}(i-j) & ; \quad \text{si } i > j \\ 1 & ; \quad \text{si } i = j \\ (-1)^{i+j}(j-i) & ; \quad \text{si } j > i \end{cases}$$

Exercice 02 : I On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Calculer, si possible, les expressions suivantes : $A+C$, $C-A$, $-2A+3C$, $-2A^t+3C^t$, $A+B$, $B-C$, AB, BA, B^tA^t, XB, AX, $(4C)\left(\frac{1}{2}A\right)$, $(C+2I_3)A$, A^2, B^2, X^tX.

II Déterminer les matrices M et N sachant que :

$$M + N = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M - N = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 03 : I On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de A
   a. En développant selon la deuxième ligne
   b. En développant selon la la troisième colonne
   c. Par la règle de Sarrus
2. A est-elle inversible? Si oui calculer son inverse

Exercices supplémentaires :

Exercice 04 : Soient les matrice A et B définie par : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 2A$ et déduire que $A^3 = 4A$.
2. Déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. La matrice A est-elle inversible ? .
4. Calculer la matrice $C = B^2 - 3B + 2I_3$. (I_3 est la matrice identité)
5. Déduire B^{-1}

Exercice 05 : I. On considère la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Déduire que : $M^3 + 2M^2 - M - 2I_3 = 0$.
2. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

Département ST:
(2025/2026)

Correction de la série N° 2: Algèbre II - LMD
- Les matrices et les déterminants -

Exercice 01:

I-1- Le type des matrices A et B:

- A est une matrice de type 3×2 (trois lignes et 2 colonnes).
- B est une matrice carrée d'ordre 3. (3 lignes = 3 colonnes).

I-2- $a_{12} = 23$; $a_{21} = 0$, $a_{32} = 40$.

I-3-
$$B = \begin{pmatrix} 12 & \frac{7}{5} & 91 \\ 11 & -1 & \sqrt{3} \\ 21 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

I-4. La Transposée de A est de type 2×3. elle est donnée par:
$$A^t = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -13 \\ 23 & -5 & 40 \end{pmatrix}$$

- La Transposée de B est une matrice carrée d'ordre 3.

$$B^t = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 21 \\ \frac{7}{5} & -1 & -4 \\ 91 & \sqrt{3} & 19 \end{pmatrix}$$

II- $C = (C_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ (C est de type 3×2).

$$C_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}(i-j) & \text{si } i > j \\ 1 & \text{si } i = j \\ (-1)^{i+j}(j-i) & \text{si } i < j \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1ère ligne: $C_{11} = 1$

$C_{12} = (-1)^3(2-1) = -1$

2ème ligne: $C_{21} = (-1)^3(2-1) = -1$

$C_{22} = 1$

3ème ligne:

$C_{31} = (-1)^4(3-1) = 2$

$C_{32} = (-1)^5(3-2) = -1$

finalement C est donnée par:

Exercice 02:

I- $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

- $A+B$ n'est pas bien définie, car A et B ne sont pas de même type.

- $C-A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$

- $-2A+3C=\begin{pmatrix}-6 & -4 & 11\\ 4 & -6 & 2\\ -5 & 1 & -6\end{pmatrix}$

- $-2A^t+3C^t$? • 1ère méthode: $A^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $C^t=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$

$$-2A^t+3C^t=\begin{pmatrix}-6 & 4 & -5\\ -4 & -6 & 1\\ 11 & 2 & -6\end{pmatrix}$$

• 2ème méthode:

$(-2A^t+3C^t)=(-2A+3C)^t$, alors d'après la matrice précédente:

$$-2A^t+3C^t=\begin{pmatrix}-6 & -4 & 11\\ 4 & -6 & 2\\ -5 & 1 & -6\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-6 & 4 & -5\\ -4 & -6 & 1\\ 11 & 2 & -6\end{pmatrix}$$

- $A+C=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 2\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

- $B-C$: n'est pas bien définie (elle n'existe pas) car B et C sont pas de même type.

- $AB=$ est bien définie car: le nombre de colonnes de $A=3=$ le nombre de lignes de B.

- $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 & 0+0+1 \\ 0+0+0 & -2+0+1 \\ 0-1+0 & -2+0+0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- $B \times A$: n'est pas bien définie car : le nombre de colonnes de $B = 2$ $\neq$ de nombre de lignes de $A = 3$.

- $B^t . A^t = (A.B)^t$

d'après la matrice précédente

$$B^t . A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- XB : n'existe pas, elle n'est pas bien définie.

- $AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 \\ -1+0+1 \\ -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

- $4C \times (\frac{1}{2}A) = 2C \times A =$

$$= 2 \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4C)(\tfrac{1}{2}A) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $(C + 2I_3) . A = \left[\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

- $(C+2I_3)\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

- $B^2 = B \times B$ n'est pas définie car B n'est pas carrée.

- $X^t X = (-1, 0, -1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (2)$

II _ Déterminons M et N :

$$M+N = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M-N = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

On a :

$$M = \frac{(M+N)+(M-N)}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

D'autre part ;

$$N = \frac{(M+N)-(M-N)}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 03 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminant de A :

a) $\det A = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -4 - 2 - 4 = -10$

b) $\det A = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -1 - 4 - 5 = -10$

c) Sarrus:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$= (-1)\times 1\times 1 + 2(-2)\times 1 + 1\times 2\times 0$$
$$-(1\times 1\times 1) - (-1\times(-2)\times 0) - (2\times 2\times 1).$$
$$= -1 - 4 - 1 - 4 = -10.$$

2) Oui A est inversible car : $\det A \neq 0$.

A^{-1} ? . On a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^{t}\mathrm{Com}A$

$$\mathrm{Com}\,A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Alors:

$$A^{-1} = \frac{-1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}^{t} = \frac{-1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

D 5