Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2025–2026

✠– Corrigé de la Série de TD numéro 3–✠

Exercice 1 :
I. Soit la fonction $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 + 2z$.

a. $f(1,1,1) = 1^2 + 2(1)(1) + 1^2 + 2(1) = 1 + 2 + 1 + 2 = \boxed{6}$.

b. $f(0,3,2) = 0^2 + 2(0)(3) + 3^2 + 2(2) = 0 + 0 + 9 + 4 = \boxed{13}$.

II. Domaine de définition :

▷ Le domaine de définition de la fonction $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ est
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$. (Pour que f soit définie il faut que : $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, donc $x^2 + y^2 \leq 9$).

▷ Le domaine de définition de la fonction $f(x,y) = \ln(x + y - 2)$ est
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 2\}$.(Pour que f soit définie il faut que : $x + y - 2 \geq 0$, donc $x + y \geq 2$).

▷ Le domaine de définition de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$ est
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$.(Pour que f soit définie il faut que : $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$, donc $x^2 + y^2 \neq 1$).

▷ Le domaine de définition de la fonction $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-1}$ est
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0,\ x \neq 1\}$.(Pour que f soit définie il faut que : $x + y \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$, donc $x + y \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$).

Exercice 2 : Étude de limites :

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{0}{0}$. On a $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x + y$ et
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x + y) = 2$, alors $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = 2}$.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. On pose $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r \geq 0$ (coordonnées polaires), on trouve
$$\frac{x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r\cos\theta\sin^2\theta.$$
Comme $\lim\limits_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta = 0$, alors $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0}$.

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x + y)sin(\dfrac{1}{x + y})$. Comme $-1 \leq sin(\frac{1}{x+y}) \leq 1$ alors
$\lim -(x + y) \leq \lim(x + y)sin(\frac{1}{x+y}) \leq \lim(x + y)$ Donc par le théorème d'encadrement, on a $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x + y)sin(\dfrac{1}{x + y}) = 0}$.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. On a $\dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$,
alors $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0}$.

Exercice 3 : Soit la fonction $f(x,y) = x^2y + xy^2$.

a. Dérivées partielles de f.

▷ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x = 2xy + y^2$.

▷ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y = x^2 + 2xy$.

b. Dérivées partielles de f en $(1,2)$. On a
$f_x(1,2) = 2\cdot 1\cdot 2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$ et $f_y(1,2) = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 2 = 1 + 4 = 5$.

c. Dérivées secondes de f.

▷ $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f_x}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy + y^2) = 2y$.

▷ $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial f_y}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy) = 2x$.

▷ $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x + 2y$.

d. Gradient de f $\boxed{\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)}$.

Exercice 4 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Continuité de f en $(0,0)$. Si on pose ($x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, avec $r \geq 0$), on trouve :
$f(x,y) = \dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Car $|\cos^2\theta\sin\theta| \leq 1$, $\forall\ \theta$.
Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, et f est continue en $(0,0)$.

2. Dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

   a. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$.

   b. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k) - 0}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0}{k} = 0$.

3. Classe C^1. Pour que f soit de classe C^1, il faut que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a :

   1. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{2xy(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}}$.

   ▷ Si on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, on trouve $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$
   $\dfrac{2r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^4} = 2\cos\theta\sin^3\theta \leq 2$. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ dépend de θ, alors la limite n'existent pas en $(0,0)$. donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$.

   2. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{x^2(x^2+y^2) - 2y^2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$.

   ▷ Si on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, on trouve $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$
   $\dfrac{r^2\cos^2\theta(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)}{r^4} = \cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

dépend de θ, alors la limite n'existent pas en $(0,0)$. donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ne sont pas continues en $(0,0)$, alors la fonction f n'est pas de C^1.

4. Différentiabilité en $(0,0)$. On dit que f est différentiable en (a,b) s'il existe une application linéaire (unique) notée $df_{(a,b)}$ telle que :

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+df_{(a,b)}(h,k)+\|(h,k)\|\,\epsilon(h,k) \quad \text{tel que} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\epsilon(h,k)=0.$$

Avec $\|(h,k)\|$ est la norme $\|\ \|_2$ donnée par $\|(h,k)\|_2=\sqrt{h^2+k^2}$.
On a $df_{(a,b)}(h,k)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,k$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, alors $f(h,k)=f(0,0)+df(0,0)(h,k)+\|(h,k)\|\epsilon(h,k) \implies f(h,k)$ $=f(0,0)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k+\|(h,k)\|\epsilon(h,k)$. Donc on obtient :

$$\epsilon(h,k)=\frac{f(h,k)-f(0,0)}{\|(h,k)\|}=\frac{1}{\|(h,k)\|}\cdot\frac{h^2k}{h^2+k^2}=\frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

En posant $h=k$:

$$\epsilon(h,h)=\frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}}=\frac{h^3}{2\sqrt{2}\,h^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0.$$

Donc $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\epsilon(h,k)\neq 0$, et par conséquent f n'est pas différentiable en $(0,0)$. **Une autre Méthode :** En polaires : Si on pose $h=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r\geq 0$, on trouve $\epsilon(h,h)=\epsilon(r,\theta)=\dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^3}=\cos^2\theta\sin\theta$, qui dépend de θ. Donc cette limite n'est pas nulle en général, et f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

5. Gradient et matrice Hessienne en $(1,1)$.
$\triangleright$ Gradient : Pour $(x,y)\neq(0,0)$, on a calculé :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\quad\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Donc en $(1,1)$:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$, $\quad\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\dfrac{0}{4}=0 \implies \boxed{\nabla f(1,1)=\left(\dfrac{1}{2},\,0\right)}$.
$\triangleright$ Pour la Hessienne, on calcule les dérivées secondes.

a. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{2y^3(x^2+y^2)^2-2xy^3\cdot 4x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}=\boxed{\frac{2y^3(x^2+y^2-4x^2)}{(x^2+y^2)^3}}.$$

En $(1,1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=\dfrac{2(1-3)}{8}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}$.

b. $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{-2x^2y\,(x^2+y^2)^2-x^2(x^2-y^2)\cdot 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{-2x^2y\left[x^2+y^2+2(x^2-y^2)\right]}{(x^2+y^2)^3}=\boxed{\frac{-2x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}}.$$

En $(1,1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)=\dfrac{-2(3-1)}{8}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}$.

c. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \dfrac{6xy^2(x^2+y^2)^2 - 2xy^3\cdot 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \dfrac{2xy^2(3(x^2+y^2)-4y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$= \boxed{\dfrac{2xy^2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}}$. En $(1,1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) = \dfrac{2(3-1)}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

d. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) = \dfrac{2(x(x^2-y^2)+2x^3)(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}$

$= \dfrac{(4x^3-2xy^2)(x^2+y^2) - 4x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{2x(x^2-y^2)+2x^3)(x^2+y^2) - 4x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$$= 2x\frac{(2x^2-y^2)(x^2+y^2) - 2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= 2x\frac{2x^4+2x^2y^2-y^2x^2-y^4-2x^4+2x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= 2x\frac{3x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^3} = \boxed{\frac{2xy^2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}}.$$

En $(1,1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1) = \dfrac{2(3-1)}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

$\triangleright$ La Matrice hessienne de f en $(1,1)$ est

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

6. Différentielle $df_{(a,b)}$. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$df_{(a,b)}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,k = \frac{2ab^3}{(a^2+b^2)^2}\,h + \frac{a^2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\,k.$$

Pour $(a,b)=(1,1)$: $df_{(1,1)} = \dfrac{h}{2}$.