
Série de TD N°02 – Algèbre 2

Exercice 1 : Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}$$

- (1) A est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse A^{-1} .
 - (2) Calculer $A^2 - A - 2I_3 = 0$, en déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A et I_3 (avec I_3 matrice identité).
-

Exercice 2 : Soit A une matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = a.I_3 + b.A$.
 - (2) En déduire que A est inversible et donner son inverse.
-

Exercice 3 : Soit la matrice associée à l'application f définie sur \mathbb{R}^3 suivant la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- (1) Déterminer l'application f .
 - (2) Calculer $\ker f$ et $\text{Im} f$ et leur dimension, f est-elle bijective ?
 - (3) Soit $S = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, -1, 0)\}$.
 - a) Montrer que S est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Donner la matrice associée à f suivant la base S .
-

Exercice 4 : Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Déterminer les valeurs propres de A .
 - (2) Montrer que A est diagonalisable.
 - (3) Déterminer P la matrice de passage. Calculer A^k , $k \in \mathbb{N}^*$.
-

Exercice 5 : Résoudre les systèmes linéaires suivants : $(S_1) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

$$(S_2) : \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} 3x + y - 2z + 3t = 0 \\ -x + 2y - 4z + 6t = 2 \\ 2x - y + 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 : [supp] : (1) Résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel m , le

système $(S) : \begin{cases} (m-1)x + z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ mx - y = 0 \end{cases}$, (2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Diagonaliser A .
