Corrigé De L'Examen De Mathématiques (II)

Corrigé De L'Exercice1(14pts) I- On a le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x+3y-z=22 \\ 3x-y+z=22 \\ -2x+y-3z=11 \end{cases}$$

1. La matrice des coefficients A et la matrice augmentée $\tilde{A}$

■ $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$ ■ $\tilde{A}=(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -1 & 22\\ 3 & -1 & 1 & 22\\ -2 & 1 & -3 & 11\end{array}\right)$. **(0.5pts)**

2. Ecriture matricielle de (S)

$(S)\Leftrightarrow AX=b\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\ 22\\ 11\end{pmatrix}$. **(0.5pts)**

II- Calculs Matriciels(04.5pts)

3. Calcul des deux produits matriciels(02.5pts)

- **Le Produit $A^2=A\times A$** On a :

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & \boldsymbol{c_{12}} & 5\\ \boldsymbol{c_{21}} & 11 & \boldsymbol{c_{23}}\\ 7 & \boldsymbol{c_{32}} & 12\end{pmatrix}.$$

On calcule les éléments suivants :

L'élément de la première ligne et de la deuxième colonne c_{12}

■ $c_{12}=L_1\times C_2=(1\quad 3\quad -1)\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=(1)(3)+(3)(-1)+(-1)(1)=3-3-1=\mathbf{-1}.$ **(0.25pts)**

L'élément de la deuxième ligne et de la première colonne c_{21}

■ $c_{21}=L_2\times C_1=(3\quad -1\quad 1)\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}=(3)(1)+(-1)(3)+(1)(-2)=3-3-2=\mathbf{-2}.$ **(0.25pts)**

L'élément de la deuxième ligne et de la troisième colonne c_{23}

■ $c_{23}=L_2\times C_3=(3\quad -1\quad 1)\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}=(3)(-1)+(-1)(1)+(1)(-3)=-3-1-3=\mathbf{-7}.$ **(0.25pts)**

L'élément de la troisième ligne et de la deuxième colonne c_{32}

■ $c_{32}=L_3\times C_2=(-2\quad 1\quad -3)\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=(-2)(3)+(1)(-1)+(-3)(1)=-6-1-3=\mathbf{-10}.$ **(0.25pts)**

Finalement : $A^2=\begin{pmatrix}12 & \mathbf{-1} & 5\\ \mathbf{-2} & 11 & \mathbf{-7}\\ 7 & \mathbf{-10} & 12\end{pmatrix}$ **(0.25pts)**

- **Le Produit $A^3=A^2\times A$** On a :

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}12 & -1 & 5\\ -2 & 11 & -7\\ 7 & -10 & 12\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c_{11}} & 42 & \boldsymbol{c_{13}}\\ 45 & -24 & 34\\ \boldsymbol{c_{31}} & 43 & \boldsymbol{c_{33}}\end{pmatrix}$$

On calcule les éléments suivants :

<u>L'élément de la première ligne et de la première colonne c_{11}</u>

■$c_{11} = L_1 \times C_1 = (12 \quad -1 \quad 5)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (12)(1) + (-1)(3) + (5)(-2) = 12 - 3 - 10 = \mathbf{-1}.$ **(0.25pts)**

<u>L'élément de la première ligne et de la troisième colonne c_{13}</u>

■$c_{13} = L_1 \times C_3 = (12 \quad -1 \quad 5)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (12)(-1) + (-1)(1) + (5)(-3) = -12 - 1 - 15 = \mathbf{-28}.$ **(0.25pts)**

<u>L'élément de la troisième ligne et de la première colonne c_{31}</u>

■$c_{31} = L_3 \times C_1 = (7 \quad -10 \quad 12)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (7)(1) + (-10)(3) + (12)(-2) = 7 - 30 - 24 = \mathbf{-47}.$ **(0.25pts)**

<u>L'élément de la troisième ligne et de la troisième colonne c_{33}</u>

■$c_{33} = L_3 \times C_3 = (7 \quad -10 \quad 12)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (7)(-1) + (-10)(1) + (12)(-3) = -7 - 10 - 36 = \mathbf{-53}.$ **(0.25pts)**

Finalement : $A^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 42 & \mathbf{-28} \\ 45 & -24 & 34 \\ \mathbf{-47} & 43 & \mathbf{-53} \end{pmatrix}.$ **(0.25pts)**

---

4. <u>Vérification (02pts)</u> On a :

$$A^3 + 3A^2 - 13A = \begin{pmatrix} -1 & 42 & -28 \\ 45 & -24 & 34 \\ -47 & 43 & -53 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 12 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -7 \\ 7 & -10 & 12 \end{pmatrix} - 13\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 42 & -28 \\ 45 & -24 & 34 \\ -47 & 43 & -53 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & -3 & 15 \\ -6 & 33 & -21 \\ 21 & -30 & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 & -39 & 13 \\ -39 & 13 & -13 \\ 26 & -13 & 39 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = 22\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ **(01.5pts)**

En d'autre terme : $A^3 + 3A^2 - 13A = 22I_3$. **(0.5pts)**

III- <u>La méthode de la matrice inverse (05pts)</u>

5. <u>Montrons que A est inversible et donnons A^{-1} (02.5pts)</u>

Il suffit de mettre l'expression "$A^3 + 3A^2 - 13A = 22I_3$" sous la forme $A \times B = I_3$ ou $B \times A = I_3$.

On a : $A^3 + 3A^2 - 13A = 22I_3 \Rightarrow \frac{1}{22}(A^3 + 3A^2 - 13A) = I_3 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{22}(A^2 + 3A - 13I_3)}_{B} \times A = I_3.$ **(0.5pts)**

Et ceci signifie A est inversible et son inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{22}(A^2 + 3A - 13I_3) = \frac{1}{22}\left[\begin{pmatrix} 12 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -7 \\ 7 & -10 & 12 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} - 13\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{22}\left[\begin{pmatrix} 12 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -7 \\ 7 & -10 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 9 & -3 & 3 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 7 & -5 & -4 \\ 1 & -7 & -10 \end{pmatrix}.$$ **(02pts)**

6. **Résolution du système (S) par la méthode de la matrice inverse (02.5pts)**

Le système (S) admet une seule solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donnée par :

$X = A^{-1}b = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 7 & -5 & -4 \\ 1 & -7 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} L_1 \times C_1 \\ L_2 \times C_1 \\ L_3 \times C_1 \end{pmatrix}.$ **(0.5pts)**

Avec :

■ $L_1 \times C_1 = (2 \quad 8 \quad 2)\begin{pmatrix} 22 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix} = (2)(22) + (8)(22) + (2)(11) = 44 + 176 + 22 = \mathbf{242}.$ **(0.5pts)**

■ $L_2 \times C_1 = (7 \quad -5 \quad -4)\begin{pmatrix} 22 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix} = (7)(22) + (-5)(22) + (-4)(11) = 154 - 110 - 44 = \mathbf{0}.$ **(0.5pts)**

■ $L_3 \times C_1 = (1 \quad -7 \quad -10)\begin{pmatrix} 22 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix} = (1)(22) + (-7)(22) + (-10)(11) = 22 - 154 - 110 = \mathbf{-242}.$ **(0.5pts)**

Donc : $X = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 242 \\ 0 \\ -242 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}.$ **(0.5pts)**

IV- La méthode de Cramer(03.5pts)

7. **Vérification que le système est de Cramer**

Le système (S) est de Cramer car sa matrice des coefficients A est inversible. **(0.5pts)**

8. **Résolution du système (S) par la méthode de Cramer (03pts)**

Comme le système est de Cramer, il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer : **(0.5pts)**

■ $\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A_x}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{22} & 3 & -1 \\ \mathbf{22} & -1 & 1 \\ \mathbf{11} & 1 & -3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{242}{22} = \mathbf{11}$ ■ $\boldsymbol{y} = \frac{|\boldsymbol{A_y}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{22} & -1 \\ 3 & \mathbf{22} & 1 \\ -2 & \mathbf{11} & -3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{0}{22} = \mathbf{0}$ ■ $\boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{A_z}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{22} \\ 3 & -1 & \mathbf{22} \\ -2 & 1 & \mathbf{11} \end{vmatrix}}{22} = \frac{-242}{22} = -\mathbf{11}.$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

■$|\boldsymbol{A}| = \left|\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right| = (1)(-1)(-3) + (3)(1)(-2) + (-1)(3)(1) - (-1)(-1)(-2) - (1)(1)(1) - (3)(3)(-3)$

$= 3 - 6 - 3 + 2 - 1 + 27 = \mathbf{22}.$ **(0.5pts)**

■$|\boldsymbol{A_x}| = \left|\begin{matrix} \mathbf{22} & 3 & -1 \\ \mathbf{22} & -1 & 1 \\ \mathbf{11} & 1 & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \mathbf{22} & 3 \\ \mathbf{22} & -1 \\ \mathbf{11} & 1 \end{matrix}\right|$

$= (22)(-1)(-3) + (3)(1)(11) + (-1)(22)(1) - (-1)(-1)(11) - (22)(1)(1) - (3)(22)(-3)$

$= 66 + 33 - 22 - 11 - 22 + 198 = \mathbf{242}.$ **(0.5pts)**

■$|\boldsymbol{A_y}| = \left|\begin{matrix} 1 & \mathbf{22} & -1 \\ 3 & \mathbf{22} & 1 \\ -2 & \mathbf{11} & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & \mathbf{22} \\ 3 & \mathbf{22} \\ -2 & \mathbf{11} \end{matrix}\right|$

$= (1)(22)(-3) + (22)(1)(-2) + (-1)(3)(11) - (-1)(22)(-2) - (1)(1)(11) - (22)(3)(-3)$

$= -66 - 44 - 33 - 44 - 11 + 198 = \mathbf{0}.$ **(0.5pts)**

$$\blacksquare |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{22} \\ 3 & -1 & \mathbf{22} \\ -2 & 1 & \mathbf{11} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix}$$

$$= (1)(-1)(11) + (3)(22)(-2) + (22)(3)(1) - (22)(-1)(-2) - (1)(22)(1) - (3)(3)(11)$$

$$= -11 - 132 + 66 - 44 - 22 - 99 = \mathbf{-242}.$$ **(0.5pts)**

Finalement : $\bar{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$. **(0.5pts)**

<u>Corrigé De L'Exercice2(06pts)</u> Résolution du système (S) par Gauss.

$$(S)\begin{cases} x + 3y - 2z + 3t = 1 \\ 2x + 6y - 2z + 4t = 4 \\ 2x + 7y - 4z + 8t = 6 \end{cases}$$

■ Echelonnement de la matrice augmentée :

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = (A|b) = \left(\begin{matrix} \mathbf{1} & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 2 & 7 & -4 & 8 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}\right) \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_1 \end{matrix} \left(\begin{matrix} \mathbf{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right) L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{matrix} \mathbf{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right) L_3 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_3 \left(\begin{matrix} \mathbf{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}\right) = \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{e}}.$$ **(01.5pts)**

■ Soit (S_e) le système associé à la matrice $\tilde{A}_e$:

$$(S_e)\begin{cases} \boldsymbol{x} + 3y - 2z + 3t = 1 \\ \quad \boldsymbol{y} \quad + \quad 2t = 4 \\ \quad \quad \boldsymbol{z} - \ t = 1 \end{cases}$$ **(0.5pts)**

Ainsi le système (S) admet une infinité de solutions (Dans (S_e) le nombre d'équations $<$ au nombre de variables).

■ La résolution de (S_e) : On résout le système (S_e) par rapport à la première variable de chaque équation, à savoir : les variables principales x, y, z (la variable t est une variable libre). Et par la méthode de substitution, on obtient :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = -3y + 2z - 3t + 1 \\ \boldsymbol{y} = -2t + 4 \\ \boldsymbol{z} = t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = -3(-2t + 4) + 2(t + 1) - 3t + 1 \\ \boldsymbol{y} = -2t + 4 \\ \boldsymbol{z} = t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = 5t - 9 \\ \boldsymbol{y} = -2t + 4 \\ \boldsymbol{z} = t + 1 \end{cases}$$ **(01.5pts)**

■ Finalement, les solutions du système (S) sont : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha - 9 \\ -2\alpha + 4 \\ \alpha + 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. **(02.5pts)**

<u>Fin Du Corrigé</u>