Département FI(LMD) SECSG **Mercredi 04 Juin 2025**

Université De Bejaia **Corrigé De L'Examen De Mathématiques (II)**

1^{ere} Année

Corrigé De L'Exercice1(10pts) **I-** On a la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}}$ telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}(i-j)\ ; & si\ i > j \\ 1\ ; & si\ i = j \\ (-1)^{i+j}(j-i)\ ; & si\ j > i \end{cases}$$

1. La Matrice A

On a d'une part, par définition : $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Et en d'autre part, en appliquant à chaque élément a_{ij} l'équation correspondante, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{1+2}(2-1) & (-1)^{1+3}(3-1) \\ (-1)^{2+1}(2-1) & 1 & (-1)^{2+3}(3-2) \\ (-1)^{3+1}(3-1) & (-1)^{3+2}(3-2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$ **(02pts)**

---

2. Le Déterminant En développant suivant la deuxième colonne, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)A_{12} + (1)A_{22} + (-1)A_{32}.$$

Où $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ désigne le cofacteur de la i^{ème} ligne et la j^{ème} colonne. Donc :

■ $A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1+2) = \mathbf{-1}$ ■ $A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = \mathbf{-3}$ ■ $A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+2) = \mathbf{-1}$.

Et par conséquent : $\det A = (-1)(-1) + (-3) + (-1)(-1) = \mathbf{-1}$. **(01.5pts)**

---

3. Le Calcul On a :

$$A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1\times C_1 & L_1\times C_2 & L_1\times C_3 \\ L_2\times C_1 & L_2\times C_2 & L_2\times C_3 \\ L_3\times C_1 & L_3\times C_2 & L_3\times C_3 \end{pmatrix}$$

Où L_i désigne la i^{eme} ligne et C_j la j^{eme} colonne. Ainsi, on a :

Les éléments de la première ligne **(0.5pts)**

■ $L_1\times C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(1) + (-1)(-1) + (2)(2) = 1+1+4 = \mathbf{6}.$

■ $L_1\times C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1)(-1) + (-1)(1) + (2)(-1) = -1-1-2 = \mathbf{-4}.$

■ $L_1\times C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(2) + (-1)(-1) + (2)(1) = 2+1+2 = \mathbf{5}.$

Les éléments de la deuxième ligne **(0.5pts)**

■ $L_2\times C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)(1) + (1)(-1) + (-1)(2) = -1-1-2 = \mathbf{-4}.$

■ $L_2\times C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) + (1)(1) + (-1)(-) = 1+1+1 = \mathbf{3}.$

■ $L_2\times C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)(2) + (1)(-1) + (-1)(1) = -2-1-1 = \mathbf{-4}.$

Les éléments de la troisième ligne **(0.5pts)**

■ $L_3 \times C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2)(1) + (-1)(-1) + (1)(2) = 2 + 1 + 2 = \mathbf{5.}$

■ $L_3 \times C_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2)(-1) + (-1)(1) + (1)(-1) = -2 - 1 - 1 = \mathbf{-4.}$

■ $L_3 \times C_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2)(2) + (-1)(-1) + (1)(1) = 4 + 1 + 1 = \mathbf{6.}$

Ainsi : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$ **(0.5pts)**

Et par la suite :

$$-A^2 + 3A + 3I_3 = -\begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 4 & -5 \\ 4 & -3 & 4 \\ -5 & 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ **(01pts)**

---

4. **Vérification La Matrice Inverse**

Il suffit de vérifier que : $(-A^2 + 3A + 3I_3) \times A = I_3$. On a :

$$(-A^2 + 3A + 3I_3) \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 \\ L_3 \times C_1 & L_3 \times C_2 & L_3 \times C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec :

■ $L_1 \times C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (0)(1) + (1)(-1) + (1)(2) = 0 - 1 + 2 = \mathbf{1.}$

■ $L_1 \times C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0)(-1) + (1)(1) + (1)(-1) = 0 + 1 - 1 = \mathbf{0.}$

■ $L_1 \times C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0)(2) + (1)(-1) + (1)(1) = 0 - 1 + 1 = \mathbf{0}.$

■ $L_2 \times C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(1) + (3)(-1) + (1)(2) = 1 - 3 + 2 = \mathbf{0.}$

■ $L_2 \times C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1)(-1) + (3)(1) + (1)(-) = -1 + 3 - 1 = \mathbf{1.}$

■ $L_2 \times C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(2) + (3)(-1) + (1)(1) = 2 - 3 + 1 = \mathbf{0.}$

■ $L_3 \times C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(1) + (1)(-1) + (0)(2) = 1 - 1 + 0 = \mathbf{0.}$

■ $L_3 \times C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1)(-1) + (1)(1) + (0)(-1) = -1 + 1 - 0 = \mathbf{0.}$

■ $L_3 \times C_3 = (1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(2) + (1)(-1) + (0)(1) = 2 - 1 + 0 = \mathbf{1}.$

D'où : $(-A^2 + 3A + 3I_3) \times A = I_3$.

Et par conséquent, la matrice inverse : $A^{-1} = -A^2 + 3A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **(01pts)**

II- on a la matrice $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ -15 & -10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$.

5. **La Transposée** $B^t = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 10 \\ 15 & -10 & 15 \end{pmatrix}$ **(0.5pts)**

6. **La Matrice C** On a : $C \times A = B^t$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$C = B^t \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 10 \\ 15 & -10 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -25 & -5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **(02pts)**

Avec :

■ $L_1 \times C_1 = (10 \quad -15 \quad 10)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (10)(0) + (-15)(1) + (10)(1) = 0 - 15 + 10 = \mathbf{-5}.$

■ $L_1 \times C_2 = (10 \quad -15 \quad 10)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (10)(1) + (-15)(3) + (10)(1) = 10 - 45 + 10 = \mathbf{-25}.$

■ $L_1 \times C_3 = (10 \quad -15 \quad 10)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (10)(1) + (-15)(1) + (10)(0) = 10 - 15 + 0 = \mathbf{-5}.$

■ $L_2 \times C_1 = (15 \quad -10 \quad 15)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (15)(0) + (-10)(1) + (15)(1) = 0 - 10 + 15 = \mathbf{5}.$

■ $L_2 \times C_2 = (15 \quad -10 \quad 15)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (15)(1) + (-10)(3) + (15)(1) = 15 - 30 + 15 = \mathbf{0}.$

■ $L_2 \times C_3 = (15 \quad -10 \quad 15)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (15)(1) + (-10)(1) + (15)(0) = 15 - 10 + 0 = \mathbf{5}.$

Corrigé de l'exercice2(04pts) On a le système d'équations linéaires suivant :

$$(S)\begin{cases} y + z = 10 \\ x + z = 30 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

1. **Ecriture matricielle de (S)**

$(S) \Leftrightarrow AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$. **(0.5pts)**

2. **Vérification que (S) est de Cramer**

Il suffit de vérifier que $\det A \neq 0$. On a par la méthode de Sarrus :

$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\Bigg| = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = \mathbf{2} \neq 0$. D'où le système (S) est de Cramer. **(0.5pts)**

3. **Résolution De (S) par Cramer**

Comme (S) est de Cramer, il admet une seule solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer : **(0.5pts)**

■ $\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}_x|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{10} & 1 & 1 \\ \mathbf{30} & 0 & 1 \\ \mathbf{20} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{40}{2} = \mathbf{20}$ ■ $\boldsymbol{y} = \frac{|\boldsymbol{A}_y|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{10} & 1 \\ 1 & \mathbf{30} & 1 \\ 1 & \mathbf{20} & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{0}{2} = \mathbf{0}$ ■ $\boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{A}_z|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & \mathbf{10} \\ 1 & 0 & \mathbf{30} \\ 1 & 1 & \mathbf{20} \end{vmatrix}}{2} = \frac{20}{2} = \mathbf{10}.$

Où par la méthode de Sarrus :

■$|\boldsymbol{A}_x| = \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{10} & 1 & 1 & \mathbf{10} & 1 \\ \mathbf{30} & 0 & 1 & \mathbf{30} & 0 \\ \mathbf{20} & 1 & 0 & \mathbf{20} & 1 \end{array}\right| = 0 + 20 + 30 - 0 - 10 - 0 = \mathbf{40}.$ **(0.5pts)**

■$|\boldsymbol{A}_y| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & \mathbf{10} & 1 & 0 & \mathbf{10} \\ 1 & \mathbf{30} & 1 & 1 & \mathbf{30} \\ 1 & \mathbf{20} & 0 & 1 & \mathbf{20} \end{array}\right| = 0 + 10 + 20 - 30 - 0 - 0 = \mathbf{0}.$ **(0.5pts)**

■$|\boldsymbol{A}_z| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & \mathbf{10} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \mathbf{30} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{20} & 1 & 1 \end{array}\right| = 0 + 30 + 10 - 0 - 0 - 20 = \mathbf{20}.$ **(0.5pts)**

Finalement : $\bar{X} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$ **(01pts)**

<u>Corrigé de l'exercice3(06pts)</u> Résolution du système (S) par Gauss :

$$(S)\begin{cases} -x - 2y + z = 2 \\ 2x + 4y - 4z = 1 \\ 2x + 5y - 5z = 3 \\ -x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

L'échelonnement de la matrice augmentée $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-1} & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow (-1)L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \mathbf{0} & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$ **(02pts)**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow L_4 + (-5)L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -34 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow \left(-\tfrac{1}{2}\right)L_3$$ **(01pts)**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -5/2 \\ 0 & 0 & 11 & -34 \end{array}\right) L_4 \leftarrow L_4 + (-11)L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -13/2 \end{array}\right)$$ **(01pts)**

A la quatrième ligne de cette dernière matrice augmentée correspond l'équation : $0 = -\frac{13}{2}$. Ce qui est impossible.

Et par conséquent, le système (S) est incompatible (n'admet pas de solutions). **(02pts)**

<u>Fin Du Corrigé</u>