Corrigé de l'exercice1(10pts) I- On a le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases}5x-3y-z=3\\4x-2y-z=2\\6x-5y\quad\;\;=4\end{cases}$$

1. La matrice des coefficients A et la matrice augmentée $\tilde{A}$

$$A=\begin{pmatrix}5&-3&-1\\4&-2&-1\\6&-5&0\end{pmatrix};\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}5&-3&-1&3\\4&-2&-1&2\\6&-5&0&4\end{array}\right).$$ **(0.5pts)**

2. Ecriture matricielle de (S)

$$(S)\Leftrightarrow AX=b\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5&-3&-1\\4&-2&-1\\6&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}.$$ **(0.5pts)**

II- On a la matrice $B=I_3-A$.

3. Le Calcul(03pts)

On a : $B=I_3-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&-3&-1\\4&-2&-1\\6&-5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3&1\\-4&3&1\\-6&5&1\end{pmatrix}.$

Donc : $B^2=B\times B=\begin{pmatrix}-4&3&1\\-4&3&1\\-6&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&3&1\\-4&3&1\\-6&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_1\times C_1&L_1\times C_2&L_1\times C_3\\L_2\times C_1&L_2\times C_2&L_2\times C_3\\L_3\times C_1&L_3\times C_2&L_3\times C_3\end{pmatrix}.$

Où L_i désigne la ieme ligne et C_j la jeme colonne. Ainsi, on a :

Les éléments de la première ligne **(0.5pts)**

- $L_1\times C_1=(-4\quad 3\quad 1)\begin{pmatrix}-4\\-4\\-6\end{pmatrix}=(-4)(-4)+(3)(-4)+(1)(-6)=16-12-6=\mathbf{-2}.$
- $L_1\times C_2=(-4\quad 3\quad 1)\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}=(-4)(3)+(3)(3)+(1)(5)=-12+9+5=\mathbf{2}.$
- $L_1\times C_3=(-4\quad 3\quad 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(-4)(1)+(3)(1)+(1)(1)=-4+3+1=\mathbf{0}.$

Les éléments de la deuxième ligne **(0.5pts)**

- $L_2\times C_1=(-4\quad 3\quad 1)\begin{pmatrix}-4\\-4\\-6\end{pmatrix}=(-4)(-4)+(3)(-4)+(1)(-6)=16-12-6=\mathbf{-2}.$
- $L_2\times C_2=(-4\quad 3\quad 1)\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}=(-4)(3)+(3)(3)+(1)(5)=-12+9+5=\mathbf{2}.$
- $L_2\times C_3=(-4\quad 3\quad 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(-4)(1)+(3)(1)+(1)(1)=-4+3+1=\mathbf{0}.$

Les éléments de la troisième ligne **(0.5pts)**

- $L_3\times C_1=(-6\quad 5\quad 1)\begin{pmatrix}-4\\-4\\-6\end{pmatrix}=(-6)(-4)+(5)(-4)+(1)(-6)=24-20-6=\mathbf{-2}.$
- $L_3\times C_2=(-6\quad 5\quad 1)\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}=(-6)(3)+(5)(3)+(1)(5)=-18+15+5=\mathbf{2}.$
- $L_3\times C_3=(-6\quad 5\quad 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(-6)(1)+(5)(1)+(1)(1)=-6+5+1=\mathbf{0}.$

Ainsi : $B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **(0.5pts)**

Et par la suite,

$B^2 + B + I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -6 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \\ -8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. **(01pts)**

4. <u>Vérification La Matrice Inverse(01pts)</u>

Il suffit de vérifier que $(B^2 + B + I_3) \times A = I_3$. On a :

$(B^2 + B + I_3) \times A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \\ -8 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 \\ L_3 \times C_1 & L_3 \times C_2 & L_3 \times C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Avec :

■ $L_1 \times C_1 = (-5 \quad 5 \quad 1) \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (-5)(5) + (5)(4) + (1)(6) = -25 + 20 + 6 = \mathbf{1}.$

■ $L_1 \times C_2 = (-5 \quad 5 \quad 1) \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = (-5)(-3) + (5)(-2) + (1)(-5) = 15 - 10 - 5 = \mathbf{0}.$

■ $L_1 \times C_3 = (-5 \quad 5 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-5)(-1) + (5)(-1) + (1)(0) = 5 - 5 + 0 = \mathbf{0}.$

■ $L_2 \times C_1 = (-6 \quad 6 \quad 1) \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (-6)(5) + (6)(4) + (1)(6) = -30 + 24 + 6 = \mathbf{0}.$

■ $L_2 \times C_2 = (-6 \quad 6 \quad 1) \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = (-6)(-3) + (6)(-2) + (1)(-5) = 18 - 12 - 5 = \mathbf{1}.$

■ $L_2 \times C_3 = (-6 \quad 6 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-6)(-1) + (6)(-1) + (1)(0) = 6 - 6 + 0 = \mathbf{0}.$

■ $L_3 \times C_1 = (-8 \quad 7 \quad 2) \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (-8)(5) + (7)(4) + (2)(6) = -40 + 28 + 12 = \mathbf{0}.$

■ $L_3 \times C_2 = (-8 \quad 7 \quad 2) \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = (-8)(-3) + (7)(-2) + (2)(-5) = 24 - 14 - 10 = \mathbf{0}.$

■ $L_3 \times C_3 = (-8 \quad 7 \quad 2) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-8)(-1) + (7)(-1) + (1)(0) = 8 - 7 + 0 = \mathbf{1}.$

D'où : $(B^2 + B + I_3) \times A = I_3$.

Et par conséquent, la matrice inverse : $A^{-1} = B^2 + B + I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \\ -8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. **(01pts)**

III– Résolution du système (S) :

5. <u>Résolution du système par la Matrice Inverse(02pts)</u>

Comme la matrice des coefficients A est inversible, alors le système (S) admet une seule solution

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donnée par : $X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \\ -8 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 \\ L_2 \times C_1 \\ L_3 \times C_1 \end{pmatrix}$. **(0.25pts)**

Avec :

■ $L_1 \times C_1 = (-5 \quad 5 \quad 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (-5)(3) + (5)(2) + (1)(4) = -15 + 10 + 4 = -\mathbf{1}.$ **(0.5pts)**

■ $L_2 \times C_1 = (-6 \quad 6 \quad 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (-6)(3) + (6)(2) + (1)(4) = -18 + 12 + 4 = -\mathbf{2}.$ **(0.5pts)**

■ $L_3 \times C_1 = (-8 \quad 7 \quad 2)\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = (-8)(3) + (7)(2) + (2)(4) = -24 + 14 + 8 = \mathbf{-2}.$ **(0.5pts)**

Finalement : $$X = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$ **(0.25pts)**

---

6. **<u>Résolution de (S) par Cramer(03pts)</u>**

Comme le système est de Cramer (A est inversible), il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer : **(0.5pts)**

$$■\ \boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A_x}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix}\mathbf{3} & -3 & -1\\ \mathbf{2} & -2 & -1\\ \mathbf{4} & -5 & 0\end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = \mathbf{-1}\ ■\ \boldsymbol{y} = \frac{|\boldsymbol{A_y}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix}5 & \mathbf{3} & -1\\ 4 & \mathbf{2} & -1\\ 6 & \mathbf{4} & 0\end{vmatrix}}{1} = \frac{-2}{1} = \mathbf{-2}\ ■\ \boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{A_z}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix}5 & -3 & \mathbf{3}\\ 4 & -2 & \mathbf{2}\\ 6 & -5 & \mathbf{4}\end{vmatrix}}{1} = \frac{-2}{1} = \mathbf{-2}.$$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

$$■|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}5 & -3 & -1\\ 4 & -2 & -1\\ 6 & -5 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}5 & -3\\ 4 & -2\\ 6 & -5\end{matrix}\Bigg| = (5)(-2)(0) + (-3)(-1)(6) + (-1)(4)(-5) - (-1)(-2)(6)$$
$$-(5)(-1)(-5) - (-3)(4)(0) = 0 + 18 + 20 - 12 - 25 - 0 = \mathbf{1}.$$ **(0.5pts)**

$$■|\boldsymbol{A_x}| = \begin{vmatrix}\mathbf{3} & -3 & -1\\ \mathbf{2} & -2 & -1\\ \mathbf{4} & -5 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}\mathbf{3} & -3\\ \mathbf{2} & -2\\ 4 & -5\end{matrix}\Bigg| = (3)(-2)(0) + (-3)(-1)(4) + (-1)(2)(-5) - (-1)(-2)(4)$$
$$-(3)(-1)(-5) - (-3)(2)(0) = 0 + 12 + 10 - 8 - 15 - 0 = \mathbf{-1}.$$ **(0.5pts)**

$$■|\boldsymbol{A_y}| = \begin{vmatrix}5 & \mathbf{3} & -1\\ 4 & \mathbf{2} & -1\\ 6 & \mathbf{4} & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}5 & \mathbf{3}\\ 4 & \mathbf{2}\\ 6 & \mathbf{4}\end{matrix}\Bigg| = (5)(2)(0) + (3)(-1)(6) + (-1)(4)(4) - (-1)(2)(6)$$
$$-(5)(-1)(4) - (3)(4)(0) = 0 - 18 - 16 + 12 + 20 - 0 = \mathbf{-2}.$$ **(0.5pts)**

$$■|\boldsymbol{A_z}| = \begin{vmatrix}5 & -3 & \mathbf{3}\\ 4 & -2 & \mathbf{2}\\ 6 & -5 & \mathbf{4}\end{vmatrix}\begin{matrix}5 & -3\\ 4 & -2\\ 6 & -5\end{matrix}\Bigg| = (5)(-2)(4) + (-3)(2)(6) + (3)(4)(-5) - (3)(-2)(6)$$
$$-(5)(2)(-5) - (-3)(4)(4) = -40 - 36 - 60 + 36 + 50 + 48 = \mathbf{-2}.$$ **(0.5pts)**

Finalement : $$\bar{X} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$ **(0.5pts)**

<u>Corrigé de l'exercice2(04pts)</u> La résolution du système (S) par Gauss :

$$(S)\begin{cases} x + y + 2z = 9\\ 2x + 4y - 3z = 1\\ 3x + 6y - 5z = 0\end{cases}$$

■ Echelonnement de la matrice augmentée $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1} & 1 & 2 & 9\\ 2 & 4 & -3 & 1\\ 3 & 6 & -5 & 0\end{array}\right)\begin{matrix}L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + (-3)L_1\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1} & 1 & 2 & 9\\ 0 & \mathbf{2} & -7 & -17\\ 0 & 3 & -11 & -27\end{array}\right)L_2 \leftarrow (1/2)L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1} & 1 & 2 & 9\\ 0 & \mathbf{1} & -7/2 & -17/2\\ 0 & 3 & -11 & -27\end{array}\right)L_3 \leftarrow L_3 + (-3)L_2\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1} & 1 & 2 & 9\\ 0 & \mathbf{1} & -7/2 & -17/2\\ 0 & 0 & \mathbf{-1/2} & -3/2\end{array}\right)L_3 \leftarrow (-2)L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1} & 1 & 2 & 9\\ 0 & \mathbf{1} & -7/2 & -17/2\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3\end{array}\right) = \tilde{A}_e.$$ **(01.5pts)**

■ Soit (S_e) le système associé à la matrice $\tilde{A}_e$:

$$(S_e)\begin{cases}\boldsymbol{x} + y + 2z = 9\\ \quad \boldsymbol{y} - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}\\ \quad\quad \boldsymbol{z} = 3\end{cases}$$ **(0.5pts)**

Ainsi, le système (S) admet une seule solution (le nombre d'équations = le nombre de variables dans (S_e)).

■ La résolution de (S_e) : On résout le système (S_e) par rapport à la première variable de chaque équation (variables principales). Et par la méthode de substitution (qui consiste à remplacer la valeur de chaque variable principale dans des équations qui contiennent et précèdent ladite variable principale), on obtient :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = -y - 2z + 9 \\ \boldsymbol{y} = \frac{7}{2}z - \frac{17}{2} \\ \boldsymbol{z} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = -y - 2z + 9 \\ \boldsymbol{y} = 2 \\ \boldsymbol{z} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = 1 \\ \boldsymbol{y} = 2 \\ \boldsymbol{z} = 3 \end{cases}$$ **(01pts)**

■ Finalement, l'unique solution du système (S) est : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. **(01pts)**

Corrigé de l'exercice3(06pts) On a la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. **Le Déterminant** En développant suivant la première ligne, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (0)A_{11} + (1)A_{12} + (2)A_{13} = A_{12} + (2)A_{13}.$$

Où $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ désigne le cofacteur de la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne. Ainsi :

■$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8-3) = \mathbf{-5}$ ■ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = \mathbf{3}$.

Et par conséquent : $\det A = (-5) + (2)(3) = -5 + 6 = \mathbf{1}$. **(01.5pts)**

2. **L'inversibilité** A est inversible car $\det A \neq 0$. **(0.5pts)**

3. **La matrice inverse par la méthode de Gauss-Jordan(04pts)**

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1$$ **(0.5pts)**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{-3} & -5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_2 \leftarrow \left(-\frac{1}{3}\right) L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 5/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + (-2)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_2 \end{array}$$ **(0.5pts)**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 2/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & \mathbf{1} & 5/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1/3} & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right) L_3 \leftarrow (3)L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 2/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & \mathbf{1} & 5/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \left(-\frac{2}{3}\right) L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \left(-\frac{5}{3}\right) L_3 \end{array}$$ **(01pts)**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) = (I_3|A^{-1}).$$ **(01.5pts)**

Finalement : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **(0.5pts)**

Fin Du Corrigé