

Corrigé de la série de TD n°3 (Algèbre2) : Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1

On considère le système :

$$(S) \begin{cases} -3x - 2y + z = 3 \\ 2x + 5y - 5z = 5 \\ 2x + 4y - 4z = 4 \end{cases}$$

1. La matrice des coefficients A du système (S) .

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Calcul de A^{-1} .

- a) Calcul du déterminant.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -3(5 \cdot (-4) - (-5) \cdot 4) + 2(2 \cdot (-4) - (-5) \cdot 2) + (2 \cdot 4 - 5 \cdot 2) \\ &= -3(-20 + 20) + 2(-8 + 10) + (8 - 10) = 2 \end{aligned}$$

$\det(A) \neq 0$ donc A est inversible.

- b) Calcul de la comatrice.

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -4 & 10 & 8 \\ 5 & -13 & -11 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\text{Com}^t(A) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -2 & 10 & -13 \\ -2 & 8 & -11 \end{pmatrix}$$

- c) La matrice inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}^t(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -2 & 10 & -13 \\ -2 & 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ -1 & 5 & -\frac{13}{2} \\ -1 & 4 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

4. Résolution du système

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ -1 & 5 & -\frac{13}{2} \\ -1 & 4 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{(x, y, z) = (0, -4, -5)}$$

Exercice 2

Considérons le système suivant :

$$(S_1) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

1. Écriture matricielle.

La matrice des coefficients A_1 du système (S_1) est donnée par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(S_1) \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Le système est-il de Cramer ?

On calcule le déterminant :

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 1 = -5$$

$\det(A_1) \neq 0$ donc (S_1) est un système de Cramer.

3. Résolution par la méthode de Cramer

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det(A_{1x})}{\det(A_1)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{-5} \\ &= \frac{-5}{-5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\det(A_{1y})}{\det(A_1)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} \\ &= \frac{0}{-5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La solution de S_1 est donc $(x, y) = (1, 0)$.

Considérons le système suivant :

$$(S_2) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 6x - 3y = 1 \end{cases}$$

1. Écriture matricielle

La matrice des coefficients A_2 du système (S_2) est donnée par :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(S_2) \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Le système est-il de Cramer ?

On calcule le déterminant :

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

$\det(A_2) = 0$ Donc (S_2) n'est pas un système de Cramer.

Considérons le système suivant :

$$(S_3) \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + z = 2 \\ -2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

1. Écriture matricielle.

La matrice des coefficients A_3 du système (S_3) est donnée par :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(S_3) \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Le système est-il de Cramer ?

On calcule le déterminant :

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(3 - 1) - 3(-9 + 2) - (3 - 2) \\ &= 2 + 21 - 1 = 22 \end{aligned}$$

$\det(A_3) \neq 0$ donc (S_3) est un système de Cramer.

3. Résolution par la méthode de Cramer

$$x = \frac{\det(A_{3x})}{\det(A_1)}$$
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{22}$$

$$\det(A_{3x}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(3 - 1) - 3(-6 - 1) - (2 + 1)$$
$$= 4 + 21 - 3 = 22.$$

Donc

$$x = \frac{22}{22} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_{3y})}{\det(A_3)}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{22}$$

$$\det(A_{3y}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-6 - 1) - 2(-9 + 2) - (3 + 4)$$
$$= -7 + 14 - 7 = 0.$$

Donc

$$y = \frac{0}{22} = 0$$

$$z = \frac{\det(A_{3z})}{\det(A_3)}$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{22}$$

$$\begin{aligned}\det(A_{3z}) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(-1 - 2) - 3(3 + 4) + 2(3 - 2) \\ &= -3 - 21 + 2 = -22.\end{aligned}$$

Donc

$$z = \frac{-22}{22} = -1$$

La solution de S_3 est donc $(x, y, z) = (1, 0, -1)$.