ST_LMD SERIE N° 3 : 2025/2026

Les systèmes d'équations linéaires :

Algèbre II : LMD.

- **Exercice 03 :** Résoudre par la méthode de pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \quad ; \quad (S_2)\begin{cases} 3x-y+2z=3 \\ x-3y+z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases}$$

- **Solution :**

$$(S_1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$ la forme matricielle $AX = B$.

$$[A|B] = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \leftarrow$$ On va transformer la matrice A à une matrice triangulaire supérieure

$$l_2 \longleftarrow 2l_1 - l_2$$
$$l_3 \longleftarrow l_1 - l_3$$

On obtient alors après ces 2 opérations

$$[A|B] \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} l_1 \\ l_4 \\ l_5 \end{array}$$

donc le système (S) est équivalent au système :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 & \dots (E_1) \\ \quad\ y+z=4 & \dots (E_2) \\ \ -y \quad\ =2 & \dots (E_3) \end{cases} \leftarrow$$ un système équivalent aussi à

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+z+y=3 & \dots (E_1) \\ \quad\ z+y=4 & \dots (E_2) \\ \quad\ -y=2 & \dots (E_3) \end{cases} \leftarrow$$ un système échelonné facile à résoudre.

D'après (E_3) on obtient :

$y=-2$, on remplace dans (E_2), on trouve

$z=6$, on " " (E_1), "

$x=-1$.

Par suite ; le système S_1 admet une unique solution qui est $\{(-1,-2,6)\}$.

$$(S_2)\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix} \leftarrow AX=B.$$

$$[A|B]=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l}l_1 \leftarrow l_1\\ l_2 \leftarrow l_1-3l_2=l_4\\ l_3 \leftarrow 2l_2-l_3=l'_5\end{array} \text{ on obtient,}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 8 & -1 & 0\\ 0 & -8 & 1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow l_1\\ \leftarrow l_4\\ \leftarrow (-1)l_5\end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 8 & -1 & 0\\ 0 & 8 & -1 & 0\end{array}\right)$$

la même équation

donc

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases}3x-y+2z=3 \quad \ldots (E_1)\\ 8y-z=0 \quad \ldots (E_2)\end{cases}$$

Un système à 2 équations et 3 inconnues, donc (S_2) admet une infinité de solutions de la forme :

Pour $\quad y = t \ldots\ldots (1) \;/\; t \in \mathbb{R}$.

$(E_2) \Longleftrightarrow \quad z = 8t \ldots\ldots (2)$.

On remplace (1) et (2) dans (E_1), et on obtient

$$x = 1 - 5t$$

Ainsi, les solutions du systèmes (S_2) sont données par :

$$S = \{ (1-5t\,;\, t\,;\, 8t) \;/\; t \in \mathbb{R} \}.$$