Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2025–2026

✠– Série numéro 1 : Intégrales et calcul des primitives–✠

Exercice 1 : Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \cos x e^{\sin x}\, dx$, 2. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$
3. $\int e^x(1+e^x)^4\, dx$, 4. $\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\, dx$.

Exercice 2 : En utilisant une intégration par parties, calculer les primitives suivantes :

1. $\int (2x+1)e^x\, dx$.
2. $\int x \sin x\, dx$.
3. $\int x \arctan x\, dx$.

Exercice 3 : En effectuant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$, $I_2 = \int \cos x e^{\sin x}\, dx$, $I_3 = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx$.

Exercice 4 : Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

$I_1 = \int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\, dx$, $I_2 = \int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}\, dx$, $I_3 = \int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}\, dx$.

Exercice 5 : Calculer les primitives suivantes :

$\int \sin^3 x\, dx$, $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$, $\int \cos 3x \sin 4x\, dx$.

Exercice 6 : Posons : $I = \int e^{2x} \cos^2 x\, dx$ et $J = \int e^{2x} \sin^2 x\, dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. En appliquant la méthode d'intégration par parties deux fois, calculer $I - J$.
3. En déduire la valeur de I et J.

Indication : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

---

corrigé

Exercice 1. 1.$\int \cos x e^{\sin x} dx$

$$\int \cos x e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int f'(x)e^{f(x)} = e^{f(x)} + C, \;\; C \in \mathbb{R}$

2.$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{f(x)} + C.$

3.$\int e^x(1+e^x)^4 dx$

$$\int e^x(1+e^x)^4 dx = \frac{(1+e^x)^5}{5} + C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int f'(x)f^{\alpha}(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \;\alpha \in \mathbb{R}.$

4. $\int \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx$

$$\int \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx = \frac{-1}{(x^2+2)} + C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(x)} + C.$

Exercice 2.

1. $\int (2x+1)e^x dx$

   On intégre par parties, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = (2x+1) \\ v'(x) = e^x \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{array} \right.$$

   On obtient donc

$$\int (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x - 2\int e^x dx$$
$$= (2x+1)e^x - 2e^x + C = (2x-1)e^x + C, C \in \mathbb{R}.$$

2. $\int x \sin x dx$

   On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x \end{array} \right.$$

On obtient, donc

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x\cos x + \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

3. $\displaystyle\int x \arctan x dx$
   On intègre par parties, en posant

$$\begin{cases} u(x) = \arctan x \\ v'(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

et on trouve :

$$\int x \arctan x dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\arctan x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$.
   En posant : $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx$, D'où

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan e^x + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

2. $\displaystyle\int \cos x e^{\sin x} dx.$
   En posant : $t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx$, D'où

$$\int \cos x e^{\sin x} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$
   En posant : $t^2 = x - 1 \Longrightarrow 2tdt = dx$, et $x = t^2 + 1$. D'où

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = 2\int \frac{t}{t^2+1}(tdt) = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{t^2+1} = 2t - 2\arctan t + C$$

$$= 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

1. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx.$

Tout d'abord on factorise le dénominateur $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, puis on décompose la fonction $\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$ en éléments simples

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2}=\frac{x+3}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}=\frac{(A+B)x-A-2B}{(x-2)(x+2)}$$

où A, B sont deux constantes réelles qu'on va déterminer.
Par identification on a :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A-2B=3 \end{cases}$$

En résolvant ce système, nous trouvons $A=5$ et $B=-4$.
donc

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2}=\frac{x+3}{(x-2)(x-1)}=\frac{5}{(x-2)}-\frac{4}{(x-1)}$$

d'où

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}=\int \frac{5}{(x-2)}dx-\int \frac{4}{(x-1)}dx=5\ln|x-2|-4\ln|x-1|+C,$$

$C\in\mathbb{R}$.

2. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}dx.$

1-ère étape : Effectuer la division euclidienne

$$\frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}=x+2+\frac{x-5}{x^2+2x+1}$$

2-ème étape : Décomposer $\frac{x-5}{x^2+2x+1}$ en éléments simples

$$\frac{x-5}{x^2+2x+1}=\frac{x-5}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}=\frac{Ax+(A+B)}{(x+1)^2}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} A=1 \\ A+B=-5 \Longrightarrow B=-6, \end{cases}$$

donc

$$\frac{x-5}{x^2+2x+1}=\frac{x-5}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)}+\frac{-6}{(x+1)^2}$$

Ainsi,

$$\frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}=x+2+\frac{1}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2}$$

3-ème étape : Intégrer :

$$\int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}dx=\int \left(x+2+\frac{1}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\int (x+2)\,dx+\int \frac{1}{x+1}dx-6\int \frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

3. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}\,dx.$
On a
$$x^2-2x+10=(x-1)^2+9$$
En posant : $x-1=3t \Longrightarrow dx=3dt$, on obtient :
$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10} &= \int \frac{3(3t+1)+1}{9(t^2+1)}3dt = \int \frac{27t+12}{9(t^2+1)}dt\\ &= 3\int \frac{t}{t^2+1}dt + \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}dt\\ &= \frac{3}{2}\ln(t^2+1)+\frac{4}{3}\arctan(t)+C\\ &= \frac{3}{2}\ln\left(\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1\right)+\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 5.

1. $\displaystyle\int \sin^3 dx\,dx$
$\displaystyle\int \sin^3 dx = \int \sin^2 \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx = \int \sin dx - \int \cos^2 x \sin x dx$
$\displaystyle= -\cos x - \int \cos^2 x \sin x dx$
Calculons $\displaystyle\int \cos^2 x \sin x dx$
On pose $t=\cos x \Longrightarrow dt=-\sin x dx.$
Donc
$\displaystyle\int \cos^2 \sin x dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3}+C = -\frac{\cos^3 x}{3}+C.$
d'où
$$\int \sin^3 dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}+C.$$
2. $\displaystyle\int \cos^5 x \sin^2 x\,dx$
$\displaystyle\int \cos^5 x \sin^2 x dx = \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \sin^2 x \cos x dx$
On pose $t=\sin x \Longrightarrow dt=\cos x dx$. Donc
$\displaystyle\int \cos^5 x \sin^2 x dx = \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6-2t^4+t^2)dt = \frac{1}{7}t^7-\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C =$
$\displaystyle\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C,\ \ C\in\mathbb{R}.$

3. $\displaystyle\int \cos 3x \sin 4x dx$

$\displaystyle\int \cos 3x \sin 4x dx = \int (\sin 4x)(\cos 3x)\,dx = \int \frac{1}{2}(\sin(3+4)x+\sin(4-3)x)\,dx$
$\displaystyle= \int \frac{1}{2}(\sin(7x)+\sin(x))\,dx = \int \frac{1}{2}(\sin(7x)\,dx + \int \frac{1}{2}(\sin(x))\,dx = \frac{-\cos(7x)}{14}-\frac{\cos(x)}{2}+C,$
$\displaystyle= \frac{-\cos(7x)}{14}-\frac{\cos(x)}{2}+C,\ C\in\mathbb{R}.$

Exercice 6 : Posons :

$$I = \int e^{2x} \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int e^{2x} \sin^2 x \, dx.$$

1. $I + J = \int e^{2x} \cos^2 x dx + \int e^{2x} \sin^2 x dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x) e^{2x} \, dx = \int e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

2. $I - J = \int e^{2x} \cos^2 x dx - \int e^{2x} \sin^2 x dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) e^{2x} \, dx = \int \cos(2x) e^{2x} \, dx$.

 Pour l'intégration par parties nous posons ($u = e^{2x}$, alors $du = 2e^{2x} \, dx$) et ($dv = \cos(2x) \, dx$, alors $v = \frac{\sin(2x)}{2}$). Donc $\int \cos(2x) e^{2x} = \frac{\sin(2x)e^{2x}}{2} - \int \frac{2\sin(2x)e^{2x}}{2} \, dx$

 $= \frac{\sin(2x)e^{2x}}{2} - \int \sin(2x) e^{2x} \, dx$. On va utiliser l'intégration par parties pour calculer $\int \sin(2x) e^{2x} \, dx$. posons ($u = e^{2x}$, alors $du = 2e^{2x} \, dx$) et ($dv = \sin(2x) \, dx$, alors $v = -\frac{\cos(2x)}{2}$). Donc $\int \sin(2x) e^{2x} \, dx = -\frac{\cos(2x)e^{2x}}{2} + \int \frac{2\cos(2x)e^{2x}}{2} \, dx$

 $= -\frac{\cos(2x)e^{2x}}{2} + \int \cos(2x) e^{2x} \, dx$, donc $\int \cos(2x) e^{2x} \, dx =$

 $\frac{\sin(2x)e^{2x}}{2} + \frac{\cos(2x)e^{2x}}{2} - \int \cos(2x) e^{2x} \, dx$, alors on obtient $2 \int \cos(2x) e^{2x} \, dx$

 $= \frac{\sin(2x)e^{2x}}{2} + \frac{\cos(2x)e^{2x}}{2} \Rightarrow \int \cos(2x) e^{2x} \, dx = \frac{(\sin(2x) + \cos(2x))e^{2x}}{4} + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

3. Pour déduire I et J on va utiliser les deux relations $I + J = \frac{e^{2x}}{2} + C_1$ et $I - J = \frac{(\sin(2x)+\cos(2x))e^{2x}}{4} + C_2$. Donc on trouve $2I = \frac{(2+\sin(2x)+\cos(2x))e^{2x}}{4} + C_1 + C_2 \Rightarrow$ $I = \frac{(2+\sin(2x)+\cos(2x))e^{2x}}{8} + C$, avec $C = \frac{C_1+C_2}{2}$ et $J = \frac{(2-\sin(2x)-\cos(2x))e^{2x}}{8} + C'$, avec $C' = \frac{C_1-C_2}{2}$.

Série d'application ň 01 : Intégrales et calcul des primitives

Exercice 1. *Calculer les primitives suivantes :*

1. $\displaystyle\int \left(x^2 + 3\sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{6x^2+4}{x^3+2x+4}dx$

3. $\displaystyle\int \cos(2x+1)dx$ 4. $\displaystyle\int (2x-2)(x^2-2x+1)^2 dx.$

Exercice 2. *Calculer les primitives suivantes par intégration par parties :*

1. $\displaystyle\int x^n \ln x \, dx,$ *où* $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}.$

2. $\displaystyle\int e^x \cos x dx.$

3. $\displaystyle\int \arctan x dx.$

Exercice 3. *En effectuant le changement de variable indique, calculer les intégrales suivantes:*

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ *en posant* $t = \sqrt{x}.$

2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ *en posant* $t = \cos x.$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ *en posant* $t = e^x.$

Exercice 4. *Intégrer les fractions rationnelles suivantes :*

1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4} dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx.$

Exercice 5. *posons :*

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx \qquad et \qquad I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$$

1. *Calculer* $I_1 + I_2$ *et* $I_1 - I_2$*. Puis déduire la valeur de* I_1 *et* I_2*.*

2. *Calculer les intégrales :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 1}dx \qquad et \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + 1}dx.$$

Corrigé

Exercice 1.

1. $\displaystyle\int \left(x^2+3\sin x+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$

On a :

$$\int \left(x^2+3\sin x+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=\int x^2dx+3\int \sin x dx+\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx+\int \frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-3\cos x+\sqrt{x}+\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

2. $\displaystyle\int \frac{6x^2+4}{x^3+2x+4}dx$

On a :

$$\int \frac{6x^2+4}{x^3+2x+4}dx=\int \frac{2(3x^2+2)}{x^3+2x+4}dx=2\int \frac{(3x^2+2)}{x^3+2x+4}dx=2\ln|x^3+2x+4|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C.$

3. $\displaystyle\int \cos(2x+1)dx$

$$\int \cos(2x+1)dx=\frac{1}{2}\sin(2x+1)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

4. $\displaystyle\int (2x-2)(x^2-2x+1)^2dx.$

$$\int (2x-2)(x^2-2x+1)^2dx=\frac{(x^2-2x+1)^{2+1}}{2+1}+C=\frac{(x^2-2x+1)^3}{3}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

L' utilisation de $\displaystyle\int f'(x)f^{\alpha}(x)dx=\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+C,\ \alpha\in\mathbb{R}.$

Exercice 2.

1. $\displaystyle\int x^n\ln x dx$

   On intégre par parties, en posant

$$\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=x^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

   On obtient donc

$$\int x^n\ln x dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\int \frac{1}{x}\frac{x^{n+1}}{n+1}dx$$
$$=\tfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\tfrac{1}{n+1}\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$
$$=\tfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\tfrac{1}{n+1}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

2. $\int e^x \cos x dx$

On va intégrer par parties deux fois. On pose alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = e^x \\ v'(x) = \cos x \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin x \end{array} \right.$$

On obtient, donc

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \underbrace{\int \sin x e^x dx}_{J}$$

On intègre une deuxième fois par parties en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = e^x \\ v'(x) = \sin x \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'(x) = e^x \\ v(x) = -\cos x \end{array} \right.$$

de sorte que

$$J = \int \sin x e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

alors

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \Longrightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

3. $\int \arctan x dx$

On intègre par parties, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \arctan x \\ v'(x) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{array} \right.$$

et on trouve :

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

Posons $t = \sqrt{x} \Longrightarrow x = t^2$ alors, on obtient $dx = 2tdt$

$$\text{Pour } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array} \right.$$

On a donc

$$\int_1^2 \frac{1-t}{t} 2tdt = 2 \int_1^2 (1-t) dt = 2 \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_1^2 = -1.$$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx.$
   Posons $t = \cos x \Longrightarrow dt = -\sin x dx$, de sorte que pour

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

   On en déduit que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_1^{-1} -\frac{dt}{(1+t^2)} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}.$
   Posons $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx$, de sorte que pour

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = e. \end{cases}$$

   Il vient

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)}$$

   On calcule cette intégrale en réalisant une décomposition en élément simples. Plus précisément, on remarque que

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}.$$

   Ainsi,

$$\int_1^e \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^e \frac{1}{t} dt - \int_1^e \frac{1}{1+t} dt = [\ln t - \ln(t+1)]_1^e = 1 - \ln(e+1) + \ln(2).$$

Exercice 4.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}$
   Tout d'abord on factorise le dénominateur $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, puis on décompose la fonction $\dfrac{x}{x^2-4}$ en éléments simples

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A - 2B}{(x-2)(x+2)}$$

   où A, B sont deux constantes réelles qu'on va déterminer.
   Par identification on a :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases}$$

   En résolvant ce système, nous trouvons $A = \dfrac{1}{2}$ et $B = \dfrac{1}{2}$.
   donc

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$$

d'où
$$\int \frac{x}{x^2-4} = \int \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}dx = \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C,$$
$C \in \mathbb{R}$.

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}\,dx.$
1-ère étape : Effectuer la division euclidienne
$$\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{5x+3}{x^2-3x+2}$$
2-ème étape : Décomposer $\frac{5x+3}{x^2-3x+2}$ en éléments simples
$$\frac{5x+3}{x^2-3x+2} = \frac{5x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)},$$
Par identification on a :
$$\begin{cases} A+B=5 \\ -2A-B=3, \end{cases}$$
En résolvant ce système, nous trouvons
$$\begin{cases} a=-8 \\ b=13, \end{cases}$$
d'où
$$\frac{5x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{-8}{(x-1)} + \frac{13}{(x-2)},$$
Ainsi,
$$\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} = 1 - \frac{8}{(x-1)} + \frac{13}{(x-2)},$$
3-ème étape : Intégrer :
$$\int \frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}dx = \int \left(1 - \frac{8}{(x-1)} + \frac{13}{(x-2)}\right)dx = x - 8\ln|x-1| + 13\ln|x-2| + C.$$
$C \in \mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$
On a
$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$$
En posant : $x+1=2t \Longrightarrow dx = 2dt$, on obtient :
$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{x^2+2x+5} &= \int \frac{2t+3}{4(t^2+1)}2dt = \int \frac{4t}{4(t^2+1)}dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \frac{3}{2}\arctan(t) + C, \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

1. Soient
$$I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$
En calculant la somme et la différence, on trouve
$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int \tfrac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int \tfrac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \tfrac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C_1. \end{aligned} \tag{1}$$
$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \int \tfrac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx - \int \tfrac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \tfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \tfrac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= -\ln(|\sin x + \cos x|) + C_2. \end{aligned} \tag{2}$$
de (1)+ (2), on a
$$2I_1 = x - \ln(|\sin x + \cos x|) + C_3, \text{ avec } C_3 = C_1 + C_2$$
d'où
$$I_1 = \frac{1}{2}(x - \ln(|\sin x + \cos x|)) + C, \text{ avec } C = \frac{C_3}{2}.$$
de (1)- (2), on a
$$2I_2 = x + \ln(|\sin x + \cos x|) + C_4, \text{ avec } C_4 = C_1 - C_2$$
d'où
$$I_2 = \frac{1}{2}(x + \ln(|\sin x + \cos x|)) + C', \text{ avec } C' = \frac{C_4}{2}.$$

2. Le changement de variable : $t = \tan \dfrac{x}{2} \Longrightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 1} dx = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} = \int_0^1 \frac{2dt}{1 + 2t + t^2 =} \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t)^2} = - \left. \frac{2}{1+t} \right|_0^1 = -1-(-2) = 1.$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 1 - 1}{\sin x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 1} dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{ère}$ année ST-LMD
Année universitaire 2025-2026
Analyse 2

Série de T.D. N°02 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 01 : *Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :*

1. $(x+1)y' + y = 0.$
2. $y' = \dfrac{y+1}{x}$ et $y(1) = 0$

Exercice 02 : *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}.$
2. $x^2y' - (2x-1)y = x^2$ et $y(1) = 1.$
3. $y' + xy = xy^2.$

Exercice 03 : *Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :*

1. $y'' - 3y' + 2y = 0.$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0.$
3. $y'' + y' + y = 0.$

Exercice 04 : *Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :*

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}.$
3. $y'' - 2y' = \sin x\,.$

Série de T.D. N°02 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 01 : *Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :*

1. $(x+1)y' + y = 0 ......(E_1)$.
   On remarque que $y = 0$ est une solution triviale de (E_1).
   Si $y \neq 0$ on a :
$$(x+1)y' + y = 0 \Leftrightarrow (x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+1}$$
   en séparant les variables, on a
$$\frac{dy}{y} = \frac{-1}{x+1}dx,$$
   d'où en intégrant le côté gauche par rapport à y et le côté droit par rapport à x, on obtient
$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x+1}dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x+1| + C = \ln\frac{1}{|x+1|} + C,\ C \in \mathbb{R},$$
   et par suite
$$|y| = \frac{1}{|x+1|}e^C \Rightarrow y = \pm e^C \frac{1}{x+1} \Rightarrow y = \frac{k}{x+1},\ \text{avec } k = \pm e^C.$$
   Donc
$$y(x) = \frac{k}{x+1},\ \text{avec } k = \pm e^C$$
   est la solution générale de (E_1).

2. $y' = \frac{y+1}{x}$ $\quad(E2)$
$$\begin{aligned}(E2) &\Rightarrow \frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x}\\ &\Rightarrow \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x}\\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x}\\ &\Rightarrow \ln|y+1| = \ln|x| + k, k \in \mathbb{R},\\ &\Rightarrow y+1 = \pm e^{\ln|x|+k}, k \in \mathbb{R},\\ &\Rightarrow y = ce^{\ln|x|} - 1, c \in \mathbb{R},\\ &\Rightarrow y = cx - 1, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
   Donc
$$y(x) = cx - 1, \quad c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de $(E2)$. Pour le problème de Cauchy on a :

$$y(1) = 0 \Rightarrow c = 1$$

Donc

$$y(x) = x - 1,$$

est la solution du problème de Cauchy.

<u>Exercice 02 :</u> *Résolvons les équations différentielles du premier ordre suivantes :*

$$y' + y = \frac{1}{1+e^x}.....(E_1)$$

(E_1) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à (E_1) est

$$y' + y = 0......(EH_1)$$

Résolution de l'équation homogène :
On remarque que $y = 0$ est une solution triviale de (EH_1).
Si $y \neq 0$ on a

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

alors en intégrant des deux cotés on obtient

$$\ln|y| = -x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

d'où

$$y = ke^{-x}, \text{où } k = \pm e^C \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale de (EH_1) est

$$y(x) = ke^{-x}.$$

<u>La variation de la constante</u>
On fait varier la constante k , on a alors

$$y'(x) = k'e^{-x} - ke^{-x}$$

puis on remplace y et y' dans (E_1) on obtient

$$k'e^{-x} - ke^{-x} + ke^{-x} = \frac{1}{1+e^x}$$

et par suite

$$k' = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow dk = \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

d'où en intégrant on a

$$\int dk = \underbrace{\int \frac{e^x}{1+e^x}dx}_{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx} \Leftrightarrow k = \ln(e^x+1) + c.$$

par conséquent
$$y(x) = (\ln(e^x+1)+c)e^{-x}, c \in \mathbb{R}.$$
est la solution générale de (E_1).
2. Résolution de l'équation différentielle suivante :
$x^2y' - (2x-1)y = x^2 \qquad (E2)$
L'équation homogène associée est
$$x^2y' - (2x-1)y = 0 \quad (EH_2)$$
$$\begin{aligned}
&\text{On suppose que } y \neq 0\\
(EH_2) &\Rightarrow x^2y' = (2x-1)y\\
&\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2x-1}{x^2}\\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x-1}{x^2}dx\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x-1}{x^2}dx\\
&\Rightarrow \ln|y| = \int \frac{2x}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2}dx\\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln\left|x^2\right| + \frac{1}{x} + k, k \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow y = \pm e^{\ln\left|x^2\right| + \frac{1}{x} + k}, k \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow y = ce^{\ln\left|x^2\right| + \frac{1}{x}}, c = \pm e^k, c \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow y = cx^2e^{\frac{1}{x}}, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$
Alors
$$y(x) = cx^2e^{\frac{1}{x}}, \quad c \in \mathbb{R}$$
est la solution générale de (EH_2).
On utilise la méthode de variation de la constante : On pose :
$$y(x) = c(x)x^2e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = c'(x)x^2e^{\frac{1}{x}} + c(x)(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$$
En remplaçant y et y' dans (E_2) on obtient :
$$\begin{aligned}
(E_2) &\Rightarrow x^2c'(x)x^2e^{\frac{1}{x}} + x^2c(x)(2x-1)e^{\frac{1}{x}} - (2x-1)c(x)x^2e^{\frac{1}{x}} = x^2\\
&\Rightarrow c'(x)x^2e^{\frac{1}{x}} = 1\\
&\Rightarrow c'(x) = \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}, \left(\text{ on fait le changement de variable } t = \frac{-1}{x}\right)\\
&\Rightarrow c(x) = e^{\frac{-1}{x}} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$
Alors
$$y(x) = x^2 + \lambda x^2e^{\frac{1}{x}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
est la solution générale de (E_2). Pour le problème de Cauchy on a :

$$y(1) = 1 \Rightarrow \lambda = 0$$

Donc

$$y(x) = x^2,$$

est la solution du problème de Cauchy.

3. *Résolution les équations différentielles non linéaires du premier ordre suivantes:*

3. $y' + xy = xy^2$. $\qquad (E3)$
   On remarque que c'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, alors on divise l'équation $(E3)$ par y^2 en supposant que $y \neq 0$ car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation

   $$\frac{y'}{y^2} + \frac{x}{y} = x, \qquad (E'3)$$

   puis on fait le changement de variable suivant

   $$z = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2},$$

   ensuite on remplace dans $(E'3)$ et on obtient

   $$-z' + xz = x$$

   qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre par la méthode de séparation des variables (ou par la méthode de la variation de la constante) comme suit:

   $$-z' + xz = x \Leftrightarrow \frac{z'}{z-1} = x \Leftrightarrow \frac{dz}{z-1} = xdx$$

   on suppose que $z \neq 1$ car $z = 1$ est une solution triviale de l'équation, d'où

   $$\ln|z-1| = \frac{x^2}{2} + c' \Leftrightarrow z = Ke^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

   donc

   $$y_g = \frac{1}{Ke^{\frac{x^2}{2}} + 1}$$

Exercice 03 : *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :* 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ (équation homogène).

Equation caractéristique:

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

On a $\Delta = 1 > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solution réelles distincte $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. D'où

$$y_h = C_1 e^{1x} + C_2 e^{2x};\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Equation caractéristique:

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

On a $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une solution double $r = -2$. D'où

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{-2x};\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $y'' + y' + y = 0$.
Equation caractéristique:

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

On a $\Delta = -3 < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes et conjuguées $r_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$. D'où

$$e^{\frac{-1}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right);\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 04 : *Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :* 1.

$$y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}.......(E_1) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

.
L'équation homogène associée à (E_1) est

$$y'' - 4y' + 3y = 0.......(EH_1)$$

L'équation caractéristique de (EH_1) est

$$r^2 - 4r + 3 = 0...........(EC_1)$$

On a $\Delta = 4 > 0$, d'où léquation (EC_1) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.
Les solutions de l'équation homogène (EH_1) sont donc les fonctions :

$$y_h(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x};\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_1):
On a le second membre de l'équation (E_1) est

$$f(x) = (2x+1)e^{-x}$$

Comme $r = -1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax+b)e^{-x}.$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$y_p'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x}; y_p'' = -2ae^{-x} + (ax+b)e^{-x}$$

En substituant dans l'équation (E_1) les expressions de y_p, y_p' et de y_p''; on obtient

$$(E_1) \Longrightarrow (8ax + 8b - 6a)e^{-x} = (2x+1)e^{-x}.$$

Par identification, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \frac{5}{16} \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_1) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \left(\frac{1}{4}x + \tfrac{5}{16}\right) e^{-x};\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_1).
Pour le problème de Cauchy, on a

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0 \ldots..$$

On a aussi

$$y'(x) = \left(\frac{-1}{4}x + \frac{-1}{16}\right) e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x}.$$

D'où

$$y'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{16} + A + 3B = 0 \ldots\ldots$$

De (1) et (2), on a

$$\begin{cases} \frac{5}{16} + A + B = 0 \\ \frac{-1}{16} + A + 3B = 0, \end{cases} \text{d'où : } \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = \frac{3}{16}. \end{cases}$$

Finalement,

$$y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{16}e^{3x},$$

est la solution de problème du Cauchy. 2.

$$y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x \ldots\ldots.(E_2)$$

L'équation homogène a déjà étè résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque cette fois que $r=1$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = x(ax+b)e^x.$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$y_p'(x) = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x; ; y_p'' = (2a+2b+4ax+ax^2+bx)e^x.$$

En substituant dans l'équation (E_2) les expressions de y_p, y_p' et de y_p''; on obtient

$$(E_2) \Longrightarrow (-4ax+2a-2b)e^x = (2x+1)e^x.$$

Par identification, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} -4a = 2 \\ 2a-2b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_2) est

$$y_p(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - x\right)e^x.$$

Finalement,

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & y_h + y_p \\ & = & C_1e^x + C_2e^{3x} + \left(-\frac{x^2}{2} - x\right)e^x;\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

est la solution générale de l'équation (E_2).
$y'' - 2y' = \sin x$.

$$y'' - 2y' = \sin x \ldots\ldots (E_3)$$

Solution : L'équation homogène associée à (E_3) est

$$y'' - 2y' = 0 \ldots.. (E_3 \cdot H)$$

L'équation caractéristique de ($E_3.H$) est

$$r^2 - 2r = 0 \ldots.. (E_3.C)$$

Les racines de l'équation $(E_3.C)$ sont : $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de $(E_3.H)$ est

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x} + Be^{2x} \\ &= A + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_3) : On a le second membre de l'équation (E_3) est

$$f(x) = \sin x = \sin(1x)e^{0x}.$$

Comme $0 + 1i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique ($E_3.C$), donc on cherche une solution particulière y_p de l'équation (E_3) sous la forme

$$y_p(x) = a \sin x + b \cos x, a, b \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_p'(x) = a \cos x - b \sin x \text{ et } y_p''(x) = -a \sin x - b \cos x.$$

En substituant dans l'équation (E_3) les expressions de y_p, y_p' et de y_p'', on obtient

$$\begin{aligned}(E_3) &\Rightarrow -a \sin x - b \cos x - 2(a \cos x - b \sin x) = \sin x \\ &\Rightarrow (-a + 2b) \sin x + (-b - 2a) \cos x = \sin x\end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ -b - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Donc une solution particulière y_p de l'équation (E_3) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x$$

Finalement,

$$\begin{aligned}Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A + Be^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x, A, B \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

est la solution générale de (E_3).

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2025–2026

✠–Série de TD numéro 3–✠

Exercice 1 :
I. Soit la fonction $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 + 2z$. Calculer $f(1,1,1)$ et $f(0,3,2)$.
II. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ 2. $f(x,y) = \ln(x + y - 2)$
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 4. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x-1}$.

Exercice 2 : Étudier les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$ 2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + y)\sin(\frac{1}{x+y})$ 4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice 3 : Soit la fonction $f(x,y) = x^2y + xy^2$.

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.
3. Calculer les dérivées secondes $(f_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y))$ et $(f_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y))$.
4. Déterminer le gradient de $f(x,y)$ $(\nabla f(x,y))$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en $(0,0)$.
2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0,0)$? f est-elle de classe C^1 ?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
5. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f en $(1,1)$.
6. Exprimer la différentielle $df_{(a,b)}$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2025–2026

✠– Corrigé de la Série de TD numéro 3–✠

Exercice 1 :

I. Soit la fonction $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 + 2z$.

a. $f(1,1,1) = 1^2 + 2(1)(1) + 1^2 + 2(1) = 1 + 2 + 1 + 2 = \boxed{6}$.

b. $f(0,3,2) = 0^2 + 2(0)(3) + 3^2 + 2(2) = 0 + 0 + 9 + 4 = \boxed{13}$.

II. Domaine de définition :

▷ Le domaine de définition de la fonction $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ est
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$. (Pour que f soit définie il faut que : $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, donc $x^2 + y^2 \leq 9$).

▷ Le domaine de définition de la fonction $f(x,y) = \ln(x + y - 2)$ est
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 2\}$.(Pour que f soit définie il faut que : $x + y - 2 \geq 0$, donc $x + y \geq 2$).

▷ Le domaine de définition de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$ est
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$.(Pour que f soit définie il faut que : $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$, donc $x^2 + y^2 \neq 1$).

▷ Le domaine de définition de la fonction $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-1}$ est
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0,\ x \neq 1\}$.(Pour que f soit définie il faut que : $x + y \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$, donc $x + y \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$).

Exercice 2 : Étude de limites :

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{0}{0}$. On a $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x + y$ et
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x+y) = 2$, alors $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = 2}$.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. On pose $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r \geq 0$ (coordonnées polaires), on trouve
$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r\cos\theta\sin^2\theta.$$
Comme $\lim\limits_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta = 0$, alors $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0}$.

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)sin(\dfrac{1}{x+y})$. Comme $-1 \leq sin(\frac{1}{x+y}) \leq 1$ alors
$\lim -(x+y) \leq \lim (x+y)sin(\frac{1}{x+y}) \leq \lim (x+y)$ Donc par le théorème d'encadrement, on a $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)sin(\dfrac{1}{x+y}) = 0}$.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On a $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, alors $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0}$.

Exercice 3 : Soit la fonction $f(x,y) = x^2y + xy^2$.

a. Dérivées partielles de f.
   - ▷ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x = 2xy + y^2$.
   - ▷ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y = x^2 + 2xy$.

b. Dérivées partielles de f en $(1,2)$. On a
   $f_x(1,2) = 2\cdot 1\cdot 2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$ et $f_y(1,2) = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 2 = 1 + 4 = 5$.

c. Dérivées secondes de f.
   - ▷ $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f_x}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy + y^2) = 2y$.
   - ▷ $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial f_y}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy) = 2x$.
   - ▷ $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x + 2y$.

d. Gradient de f $\boxed{\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 \\ x^2 + 2xy \end{pmatrix}}$.

Exercice 4 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Continuité de f en $(0,0)$. Si on pose ($x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, avec $r \geq 0$), on trouve :
   $f(x,y) = \dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Car $|\cos^2\theta\sin\theta| \leq 1, \ \forall\ \theta$.
   Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, et f est continue en $(0,0)$.

2. Dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

   a. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$.

   b. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-0}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0}{k} = 0$.

3. Classe C^1. Pour que f soit de classe C^1, il faut que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$.
   Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a :

   1. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{2xy(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}}$.

   ▷ Si on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, on trouve $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$
   $\dfrac{2r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^4} = 2\cos\theta\sin^3\theta \leq 2$. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ dépend de θ, alors la limite n'existent pas en $(0,0)$. donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$.

   2. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{x^2(x^2+y^2) - 2y^2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$.

▷ Si on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, on trouve $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ $\frac{r^2\cos^2\theta(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^4} = \cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta$. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ dépend de θ, alors la limite n'existent pas en $(0, 0)$. donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ne sont pas continues en $(0, 0)$, alors la fonction f n'est pas de C^1.

4. Différentiabilité en $(0, 0)$. On dit que f est différentiable en (a, b) s'il existe une application linéaire (unique) notée $df_{(a,b)}$ telle que :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + df_{(a,b)}(h, k) + \|(h, k)\|\,\epsilon(h, k) \quad \text{tel que} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h, k) = 0.$$

Avec $\|(h, k)\|$ est la norme $\|\ \|_2$ donnée par $\|(h, k)\|_2 = \sqrt{h^2 + k^2}$.
On a $df_{(a,b)}(h, k) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,k$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, alors $f(h, k) = f(0, 0) + df(0, 0)(h, k) + \|(h, k)\|\epsilon(h, k) \implies f(h, k)$ $= f(0, 0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k + \|(h, k)\|\epsilon(h, k)$. Donc on obtient :

$$\epsilon(h, k) = \frac{f(h, k) - f(0, 0)}{\|(h, k)\|} = \frac{1}{\|(h, k)\|} \cdot \frac{h^2k}{h^2 + k^2} = \frac{h^2k}{(h^2 + k^2)^{3/2}}.$$

En posant $h = k$:

$$\epsilon(h, h) = \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{h^3}{2\sqrt{2}\,h^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Donc $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h, k) \neq 0$, et par conséquent f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. **Une autre Méthode :** En polaires : Si on pose $h = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, on trouve $\epsilon(h, h) = \epsilon(r, \theta) = \dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^3} = \cos^2\theta\sin\theta$, qui dépend de θ. Donc cette limite n'est pas nulle en général, et f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

5. Gradient et matrice Hessienne en $(1, 1)$.
▷ Gradient : Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a calculé :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. Donc en $(1, 1)$:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \dfrac{0}{4} = 0.$
On a $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$. Donc $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$.
▷ Pour la Hessienne, on calcule les dérivées secondes.

a. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}\right) = \dfrac{2y^3(x^2 + y^2)^2 - 2xy^3 \cdot 4x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \boxed{\dfrac{2y^3(x^2 + y^2 - 4x^2)}{(x^2 + y^2)^3}}$.

En $(1, 1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = \dfrac{2(1 - 3)}{8} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$.

b. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) = \dfrac{-2x^2y\,(x^2+y^2)^2 - x^2(x^2-y^2)\cdot 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$

$$= \frac{-2x^2y\big[x^2+y^2+2(x^2-y^2)\big]}{(x^2+y^2)^3} = \boxed{\frac{-2x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}}.$$

En $(1,1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = \dfrac{-2(3-1)}{8} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$.

c. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \dfrac{6xy^2(x^2+y^2)^2 - 2xy^3\cdot 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \dfrac{2xy^2(3(x^2+y^2)-4y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$= \boxed{\dfrac{2xy^2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}}$. En $(1,1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \dfrac{2(3-1)}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

d. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) = \dfrac{2(x(x^2-y^2)+2x^3)(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}$

$= \dfrac{(4x^3-2xy^2)(x^2+y^2) - 4x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{2x(x^2-y^2)+2x^3)(x^2+y^2) - 4x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$$= 2x\frac{(2x^2-y^2)(x^2+y^2) - 2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= 2x\frac{2x^4+2x^2y^2-y^2x^2-y^4-2x^4+2x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= 2x\frac{3x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^3} = \boxed{\frac{2xy^2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}}.$$

En $(1,1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = \dfrac{2(3-1)}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

▷ La Matrice hessienne de f en $(1,1)$ est

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

6. Différentielle $df_{(a,b)}$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$df_{(a,b)}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,k = \frac{2ab^3}{(a^2+b^2)^2}\,h + \frac{a^2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\,k.$$

Pour $(a,b) = (1,1)$: $df_{(1,1)} = \dfrac{h}{2}$.