

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✂ Série numéro 1 : Intégrales et calcul des primitives ✂

Exercice 1 : Calculer les primitives et les intégrales suivantes :

$$\int \left(e^{3x} + \frac{2x}{x^2 - 2} + x\sqrt{x} \right) dx, \quad \int \cos x \sin^2 x dx, \quad \int x\sqrt{1+x^2} dx, \quad \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx,$$
$$\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x} dx, \quad \int e^x(1+e^x)^4 dx, \quad \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx \quad \int \cos \alpha x dx, \quad (\alpha \neq 0).$$

Exercice 2 : En Intégrant par parties, calculer :

$$\int_1^2 \ln x dx, \quad \int x^2 e^x dx, \quad \int 2e^x \cos x dx, \quad \int x^n \ln x dx, \quad \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

Exercice 3 : En effectuant un changement de variable, calculer :

$$I_1 = \int \frac{e^{2x+1}}{2+5e^{2x+1}} dx, \quad I_2 = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx, \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^4} dx.$$

Exercice 4 : Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

$$I_1 = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx, \quad I_2 = \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} dx, \quad I_3 = \int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx$$

Exercice 5 : Calculer les primitives suivantes :

$$\int \cos^6 x \sin 3x dx, \quad \int \cos 4x \sin 3x dx, \quad \int \cos^2 x \sin^2 x dx, \quad \int \cos^7 x \sin^2 x dx.$$

Exercice 6 : Posons : $I = \int e^{2x} \cos^2 x dx$ et $J = \int e^{2x} \sin^2 x dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. En appliquant la méthode d'intégration par parties deux fois, calculer $I - J$.
3. En déduire la valeur de I et J .

Indication : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✂– Corrigé de la Série numéro 1 : Intégrales et calcul des primitives –✂

Exercice 1 :

Calcul des primitives :

- $\int \left(e^{3x} + \frac{2x}{x^2-2} + x\sqrt{x} \right) dx = \int e^{3x} dx + \int \frac{2x}{x^2-2} dx + \int x\sqrt{x} dx$. On a :
 - ▷ $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, (car $\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C_1$, $\alpha \neq 0$).
 - ▷ $\int \frac{2x}{x^2-2} dx = \ln|x^2-2| + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, (car $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C_2$).
 - ▷ $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C_3$, $C_3 \in \mathbb{R}$, (car $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C_3$).

Donc : $\int \left(e^{3x} + \frac{2x}{x^2-2} + x\sqrt{x} \right) dx = \frac{e^{3x}}{3} + \ln|x^2-2| + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$ (où $C = C_1 + C_2 + C_3 \in \mathbb{R}$).

- $\int \cos x \sin^2 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$, $C \in \mathbb{R}$, (car $\int f'(x)f^n(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$).
 - $\int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\int \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + \arctan x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x} dx = \int \left(\frac{2x}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx = 2 \int dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = 2 \int dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int dx + 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2(x+\sqrt{x}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\int e^x(1+e^x)^4 dx = \frac{(1+e^x)^5}{5} + C$, $C \in \mathbb{R}$, (car $\int f'(x)f^n(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$).
 - $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int (1+x-2\sqrt{x})x^{-\frac{1}{3}} dx = \int \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} \right) dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 2 \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + C$, $C \in \mathbb{R} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} - 2 \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + C$, $C \in \mathbb{R} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\forall \alpha \neq 0$, on a $\int \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
-

Exercice 2 :

Intégration par parties :

- $\int_1^2 \ln x \, dx$. Posons $u = \ln x$, alors $du = \frac{dx}{x}$, et $dv = dx$, alors $v = x$. Donc $\int \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = (x \ln x - x) \Big|_1^2 = 0.386$.
 - $\int x^2 e^x \, dx$. Posons $u = x^2$, alors $du = 2x \, dx$, et $dv = e^x \, dx$, alors $v = e^x$. Donc $\int x^2 e^x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x^2 e^x - 2 \int x e^x$. Pour le calcul de $\int x e^x$ on pose $u = x$, alors $du = dx$, et $dv = e^x \, dx$, alors $v = e^x$. Donc $\int x e^x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x e^x - \int e^x \, dx$, on obtient alors $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\int 2e^x \cos x \, dx$. Posons $u = 2e^x$, alors $du = 2e^x \, dx$, et $dv = \cos x \, dx$, alors $v = \sin x$. Donc $\int 2e^x \cos x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = 2e^x \sin x - \int 2e^x \sin x \, dx$. Maintenant on va calculer $\int 2e^x \sin x \, dx$ en posant $u = 2e^x$, alors $du = 2e^x \, dx$, et $dv = \sin x \, dx$, alors $v = -\cos x$. Donc $\int 2e^x \sin x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = -2e^x \cos x + \int 2e^x \cos x \, dx$. On obtient alors $\int 2e^x \cos x \, dx = 2e^x \sin x + 2e^x \cos x - \int 2e^x \cos x \, dx$, donc $\int 2e^x \cos x \, dx = e^x(\sin x + \cos x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\int x^n \ln x \, dx$. Posons $u = \ln x$, alors $du = \frac{dx}{x}$ et $dv = x^n \, dx$, alors $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Donc $\int x^n \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{x(n+1)} \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\int_0^1 x e^{-x} \, dx$. Posons $u = x$, alors $du = dx$ et $dv = e^{-x} \, dx$, alors $v = -e^{-x}$. Donc $\int_0^1 x e^{-x} \, dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} \, dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - 2e^{-1} = 0.264$.
-

Exercice 3 :

Intégration par changement de variable

- $I_1 = \int \frac{e^{2x+1}}{2+5e^{2x+1}} \, dx$. Posons $t = e^{2x+1} \Rightarrow dt = 2e^{2x+1} \, dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2e^{2x+1}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2t}$, donc $I_1 = \int \frac{t \, dt}{2t(2+5t)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{2+5t} = \frac{1}{10} \int \frac{5 \, dt}{2+5t} = \frac{1}{10} \ln |2+5t| + C = \frac{1}{10} \ln |2+5e^{2x+1}| + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $I_2 = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} \, dx$. Posons $t = \sqrt{x-1}$, alors $x = t^2 + 1$ et $dx = 2t \, dt$. Donc $I_2 = \int \frac{t \, 2t \, dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{t^2 \, dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{(t^2+1-1) \, dt}{t^2+1} = \int 2 \, dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2 \arctan(t) + C = 2\sqrt{x-1} - 2 \arctan \sqrt{x-1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^4} \, dx$. Posons $t = 1 + \sin x$, alors $dt = \cos x$. Pour $x = 0$, $t = 1 + \sin 0 = 1$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, $t = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$. Donc $I_3 = \int_1^2 \frac{dt}{t^4} = \int_1^2 t^{-4} \, dt = -\frac{1}{3t^3} \Big|_1^2 = \frac{7}{24}$.
-

Exercice 4 :

Intégration des fractions rationnelles

- $I_1 = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} \, dx$. On écrit $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ sous la forme suivante : $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$, avec A et B sont des valeurs à déterminer.

1. $\frac{2x+3}{x+5} = A + \frac{B(x-2)}{x+5}$. Si $x = 2$ on obtient $A = \frac{2(2)+3}{2+5} = 1$.

2. $\frac{2x+3}{x-2} = \frac{A(x+5)}{x-2} + B$. Si $x = -5$ on obtient $B = \frac{2(-5)+3}{-5-2} = 1$.

Donc $I_2 = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+5} = \ln |x-2| + \ln |x+5| + C = \ln |(x-2)(x+5)| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

• $I_2 = \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} dx$. On a $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Donc on $I_3 = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} dx$. On écrit $\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}$ sous la forme suivante : $\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$, avec A et B sont des valeurs à déterminer.

1. $\frac{2x+3}{x-3} = A + \frac{B(x-2)}{x-3}$. Si $x = 2$ on obtient $A = \frac{2(2)+3}{2-3} = -7$.

2. $\frac{2x+3}{x-2} = \frac{A(x-3)}{x-2} + B$. Si $x = 3$ on obtient $B = \frac{2(3)+3}{3-2} = 9$.

Donc $I_3 = \int \frac{-7dx}{x-2} + \int \frac{9dx}{x-3} = -7 \ln|x-2| + 9 \ln|x-3| + C, C \in \mathbb{R}$.

• $\int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx$. Il est clair que le dénominateur $x^2 + x + 1$, n'admet pas de solution dans \mathbb{R} , car le discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Donc dans ce cas on va utiliser la méthode de complétion du carré comme suit : $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

On pose $t = x + \frac{1}{2}$, donc $dt = dx$ et $x = t - \frac{1}{2}$. En remplaçant dans l'intégrale, on obtient :

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx = \int \frac{3(t-\frac{1}{2})+2}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \int \frac{3t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \int \frac{3t}{t^2+\frac{3}{4}} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} dt.$$

$$\triangleright \int \frac{3t}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \frac{3}{2} \ln|t^2 + \frac{3}{4}| + C_1 = \frac{3}{2} \ln|x^2 + x + 1| + C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\triangleright \text{Pour l'intégrale } \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} dt, \text{ on pose } a^2 = \frac{3}{4}, \text{ puis on remplace } \frac{3}{4} \text{ par sa valeur.}$$

Donc $\frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+a^2} dt = \frac{1}{2a^2} \int \frac{1}{(\frac{t}{a})^2+1} dt = \frac{1}{2a^2} a \arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C_2 =$

$$\frac{1}{2a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2, C_2 \in \mathbb{R}. \text{ Ainsi : } \int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx =$$

$$\frac{3}{2} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5 :

Intégration des fonctions Trigonométriques

• $\int \cos^6 x \sin^3 x dx = \int \cos^6 x \sin x \sin^2 x dx$. Comme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, alors $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Donc $\int \cos^6 x \sin^3 x dx = \int \cos^6 x \sin x (1 - \cos^2 x) dx$. Posons $u = \cos x$, alors $du = -\sin x$ on obtient alors $\int \cos^6 x \sin x (1 - \cos^2 x) dx = -\int u^6 (1 - u^2) du = -\int (u^6 - u^8) du = -\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C = -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9} + C, C \in \mathbb{R}$.

• $\int \cos 4x \sin 3x dx = \int (\sin 3x)(\cos 4x) dx = \int \frac{1}{2}(\sin(3+4)x + \sin(3-4)x) dx = \int \frac{1}{2}(\sin(7x) + \sin(-x)) dx = \int \frac{1}{2}(\sin(7x) dx + \int \frac{1}{2}(\sin(-x)) dx = \frac{-\cos(7x)}{14} + \frac{\cos(-x)}{2} + C, = \frac{-\cos(7x)}{14} + \frac{\cos(x)}{2} + C, C \in \mathbb{R}$. Car la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos(x)$).

• $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$. Dans ce cas on va utiliser les deux relations suivantes :

$$\triangleright \cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1, \text{ alors } \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}.$$

$$\triangleright \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x, \text{ alors } \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}. \text{ Donc } \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2x)) \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) = \frac{1}{4}(1 - \cos^2(2x)) = \frac{1}{4}(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x)\right)) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)\right) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)). \text{ On}$$

obtient alors $\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \int \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)) dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos(4x)) dx =$

$$\frac{1}{8}(x - \frac{\sin 4x}{4}) + C = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C, C \in \mathbb{R}.$$

• $\int \cos^7 x \sin^2 x dx$. Dans ce cas on va utiliser la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, puis on va remplacer $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$ et poser $u = \sin x$, alors $du = \cos x dx$.

Donc on obtient $\int \cos^7 x \sin^2 x dx = \int \cos^6 x \cos x \sin^2 x dx = \int (\cos^2 x)^3 \sin^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^3 \sin^2 x \cos x dx = \int (1 - u^2)^3 u^2 du = \int (1 - u^2)(1 - u^2)(1 - u^2)u^2 du =$

$$\int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6)u^2 du = \int (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8) du = -\frac{u^9}{9} + \frac{3u^7}{7} - \frac{3u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c, c \in \mathbb{R} =$$

$$-\frac{\sin^9 x}{9} + \frac{3 \sin^7 x}{7} - \frac{3 \sin^5 x}{5} + \frac{\sin^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 : Posons :

$$I = \int e^{2x} \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int e^{2x} \sin^2 x \, dx.$$

1. $I + J = \int e^{2x} \cos^2 x \, dx + \int e^{2x} \sin^2 x \, dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x) e^{2x} \, dx = \int e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2} + C_1$,
 $C_1 \in \mathbb{R}$.
2. $I - J = \int e^{2x} \cos^2 x \, dx - \int e^{2x} \sin^2 x \, dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) e^{2x} \, dx = \int \cos(2x) e^{2x} \, dx$. Pour l'intégration par parties nous posons ($u = e^{2x}$, alors $du = 2e^{2x} \, dx$) et ($dv = \cos(2x) \, dx$, alors $v = \frac{\sin(2x)}{2}$). Donc $\int \cos(2x) e^{2x} \, dx = \frac{\sin(2x) e^{2x}}{2} - \int \frac{2 \sin(2x) e^{2x}}{2} \, dx = \frac{\sin(2x) e^{2x}}{2} - \int \sin(2x) e^{2x} \, dx$. On va utiliser l'intégration par parties pour calculer $\int \sin(2x) e^{2x} \, dx$. posons ($u = e^{2x}$, alors $du = 2e^{2x} \, dx$) et ($dv = \sin(2x) \, dx$, alors $v = -\frac{\cos(2x)}{2}$). Donc $\int \sin(2x) e^{2x} \, dx = -\frac{\cos(2x) e^{2x}}{2} + \int \frac{2 \cos(2x) e^{2x}}{2} \, dx = -\frac{\cos(2x) e^{2x}}{2} + \int \cos(2x) e^{2x} \, dx$, donc $\int \cos(2x) e^{2x} \, dx = \frac{\sin(2x) e^{2x}}{2} + \frac{\cos(2x) e^{2x}}{2} - \int \cos(2x) e^{2x} \, dx$, alors on obtient $2 \int \cos(2x) e^{2x} \, dx = \frac{\sin(2x) e^{2x}}{2} + \frac{\cos(2x) e^{2x}}{2} \Rightarrow \int \cos(2x) e^{2x} \, dx = \frac{(\sin(2x) + \cos(2x)) e^{2x}}{4} + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$.
3. Pour déduire I et J on va utiliser les deux relations $I + J = \frac{e^{2x}}{2} + C_1$ et $I - J = \frac{(\sin(2x) + \cos(2x)) e^{2x}}{4} + C_2$. Donc on trouve $2I = \frac{(2 + \sin(2x) + \cos(2x)) e^{2x}}{4} + C_1 + C_2 \Rightarrow I = \frac{(2 + \sin(2x) + \cos(2x)) e^{2x}}{8} + C$, avec $C = \frac{C_1 + C_2}{2}$ et $J = \frac{(2 - \sin(2x) - \cos(2x)) e^{2x}}{8} + C'$, avec $C' = \frac{C_1 - C_2}{2}$.

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✂– Série de TD numéro 2–✂

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $(1 + x^2)^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 2xy^2 = 0$,
 2. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$, avec $y(1) = 2$,
 3. $x^3 + 2y^2y' = 0$,
 4. $x^2y' - e^y = 0$,
 5. $(x^2 + 1)y' + xy = 0$.
-

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - 4y = 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
 2. $y' + y = 2e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
 3. $y' + y = x^2$,
 4. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$, $x \in]0, +\infty[$,
 5. $x(1 + \ln^2 x)y' + 2(\ln x)y = 1$, $x \in]0, +\infty[$,
 6. $xy' + 6y - 3xy^4 = 0$
-

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$,
 2. $y'' + 2y' + y = 0$,
 3. $y'' - 2y' + 2y = 0$,
 4. $y'' - 2\alpha y' + y = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
-

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - y = x^2 + x + 1$,
 2. $y'' - 2y' - 8y = e^x$,
 3. $y'' - 2y' = \sin x$,
 4. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
-

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
 Faculté de Technologie
 Département de Technologie
 Première année Ingénieur (ST-TM)
 Année universitaire 2025–2026

✠– Corrigé de la Série de TD numéro 2–✠

Exercice 1 :

- $(1 + x^2)^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 2xy^2 = 0$ [1]
 [1] $\Rightarrow (1 + x^2)^2 \frac{dy}{dx} = -2x(1 + y^2) \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} dx \Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$
 $\Rightarrow \arctan y = \frac{1}{1+x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \tan\left(\frac{1}{1+x^2} + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$
- $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$, avec $y(1) = 2$ [2]
 [2] $\Rightarrow x^2 + y^2 = xy \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. Donc [2] est de la forme $y' = f(\frac{y}{x})$. Si on pose $v = \frac{y}{x}$ on obtient $y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$. Comme $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$, alors $v + x \frac{dv}{dx} = v + \frac{1}{v}$ [2']
 [2'] $\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \Rightarrow x dv = \frac{1}{v} dx \Rightarrow v dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int v dv = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \ln|x| + C \Rightarrow v^2 = 2 \ln|x| + 2C, c \in \mathbb{R} \Rightarrow v = \pm \sqrt{2 \ln|x| + 2C}, C \in \mathbb{R}$. Comme $y = vx$, alors la solution générale de l'équation [2] est donnée par $y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln|x| + K}$, avec $K = 2C, C \in \mathbb{R}$. La condition $y(1) = 2 \Rightarrow \pm 1 \sqrt{2 \ln|1| + K} = 2 \Rightarrow \sqrt{K} = 2 \Rightarrow K = 4$, donc la solution finale est $y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln|x| + 4}$.
- $x^3 + 2y^2y' = 0$ [3]
 [3] $\Rightarrow 2y^2 \frac{dy}{dx} = -x^3 \Rightarrow 2y^2 dy = -x^3 dx \Rightarrow \int 2y^2 dy = \int -x^3 dx \Rightarrow \frac{2}{3}y^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow y^3 = -\frac{3}{8}x^4 + K, K = \frac{3C}{2} \Rightarrow y(x) = (-\frac{3}{8}x^4 + K)^{1/3}, K \in \mathbb{R}.$
- $x^2y' - e^y = 0$ [4]
 [4] $\Rightarrow x^2 \frac{dy}{dx} = e^y \Rightarrow e^{-y} dy = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -e^{-y} = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{x} - C$. Donc, la solution générale est : $y(x) = -\ln\left(\frac{1}{x} - C\right), C \in \mathbb{R}.$
- $(x^2 + 1)y' + xy = 0$ [5]
 [5] $\Rightarrow (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + xy = 0 \Rightarrow (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -\frac{x}{x^2+1} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{x}{x^2+1} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} dx \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2+1)+c} \Rightarrow |y| = e^{C+\ln((x^2+1)^{-\frac{1}{2}})} \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{\ln((x^2+1)^{-\frac{1}{2}})} = \frac{e^C}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y = \frac{K}{\sqrt{x^2+1}}, K \in \mathbb{R}.$

Exercice 2 :

- $y' - 4y = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ [21]
 ▷ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de [21] est donnée comme suit : $y' - 4y = 0 \Rightarrow y' = 4y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = 4y \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = 4 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = 4 \int dx \Rightarrow \ln|y| = 4x + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{4x} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{4x}, C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = Ke^{4x}, k \in \mathbb{R}$.
 ▷ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de [21]). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x)e^{4x}$. En remplaçant dans [21] on obtient : $(K(x)e^{4x})' - 4K(x)e^{4x} = 3 \Rightarrow (K(x))'e^{4x} + 4K(x)e^{4x} - 4K(x)e^{4x} = 3 \Rightarrow K'(x)e^{4x} = 3 \Rightarrow K(x) = \int 3e^{-4x} dx = -\frac{3}{4}e^{-4x} \Rightarrow y_p = -\frac{3}{4}e^{-4x}e^{4x} = -\frac{3}{4}$. Donc, la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = -\frac{3}{4} + Ke^{4x}, \quad K \in \mathbb{R}.$

2. $y' + y = 2e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots [22]$

▷ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de [22] est donnée comme suit : $y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = -y \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -1 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = - \int dx \Rightarrow \ln |y| = -x \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-x} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{-x}, C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = Ke^{-x}, k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de [22]). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x)e^{-x}$. En remplaçant dans [22] on obtient : $(K(x)e^{-x})' - 4K(x)e^{-x} = 2e^x \Rightarrow (K(x)'e^{-x}) - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = 2e^x \Rightarrow K'(x)e^{-x} = 2e^x \Rightarrow K(x) = \int 2e^{2x} dx = e^{2x} \Rightarrow y_p = e^{2x}e^{-x} = e^x$. Donc, la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = e^x + Ke^{-x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

3. $y' + y = x^2, \quad x \in]0, +\infty[\dots\dots\dots [23]$

▷ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de [23] est donnée comme suit : $y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = -y \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -1 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = - \int dx \Rightarrow \ln |y| = -x \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-x} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{-x}, C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = Ke^{-x}, k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de [23]). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x)e^{-x}$. En remplaçant dans [23] on obtient : $(K(x)e^{-x})' - 4K(x)e^{-x} = x^2 \Rightarrow (K(x)'e^{-x}) - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = x^2 \Rightarrow K'(x)e^{-x} = x^2 \Rightarrow K(x) = \int x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x$, avec a, b et c sont des valeurs à déterminer.
 $\int x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x \Rightarrow x^2 e^x dx = [(ax^2 + bx + c)e^x]' \Rightarrow x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x + (2ax + b)e^x \Rightarrow x^2 e^x dx = (ax^2 + (2a + b)x + (b + c))e^x \Rightarrow a=1, b=-2$ et $c=2 \Rightarrow y_p = (x^2 - 2x + 2)$. Donc la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = (x^2 - 2x + 2) + Ke^{-x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

4. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1, \quad x \in]0, +\infty[\dots\dots\dots [24]$

▷ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de [24] est donnée comme suit : $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0 \Rightarrow y' = (2x - \frac{1}{x})y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = (2x - \frac{1}{x})y \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (2x - \frac{1}{x}) \Rightarrow \frac{1}{y} dy = (2x - \frac{1}{x}) dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int (2x - \frac{1}{x}) dx \Rightarrow \ln |y| = x^2 - \ln(x) + C \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{2x} \cdot e^{\ln(\frac{1}{x})} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot \frac{e^{x^2}}{x}, C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = K \frac{e^{x^2}}{x}, k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de [24]). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x) \frac{e^{x^2}}{x}$. En remplaçant dans [24] on obtient : $(K(x) \frac{e^{x^2}}{x})' - (2x - \frac{1}{x})(K(x) \frac{e^{x^2}}{x}) = 1 \Rightarrow K'(x) \frac{e^{x^2}}{x} = 1 \Rightarrow K'(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow K(x) = \int xe^{-x^2} dx$. Posons $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow K(x) = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Rightarrow y_p = -\frac{1}{2x}$. Donc la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = -\frac{1}{2x} + K \frac{e^{x^2}}{x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

5. $x(1 + \ln^2 x)y' + 2(\ln x)y = 1, \quad x \in]0, +\infty[\dots\dots\dots [25]$

L'équation [25] $\Leftrightarrow y' + \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)}y = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \dots\dots\dots [25]'$

▷ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de [25]' est donnée comme suit : $y' + \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)}y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)}y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -\frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} dx = -\frac{2u}{1+u^2} du$, avec $u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx$. Donc $\Rightarrow \ln |y| = -\frac{2u}{1+u^2} du = -\ln(1 + u^2) + C = -\ln(1 + \ln^2 x) + C$,

$C \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{\ln(\frac{1}{1+\ln^2 x})} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot \frac{1}{1+\ln^2 x}$, $C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = \frac{K}{1+\ln^2 x}$, $k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de [25]).

Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = \frac{K(x)}{1+\ln^2 x}$. En remplaçant dans [25] on obtient : $\frac{K'(x)}{1+\ln^2 x} - \frac{K(x) \cdot 2 \ln x}{x(1+\ln^2 x)^2} + \frac{2 \ln x}{x(1+\ln^2 x)} \cdot \frac{K(x)}{1+\ln^2 x} = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} \Rightarrow \frac{K'(x)}{1+\ln^2 x} = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$
 $\Rightarrow K'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow K(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Rightarrow y_p = \frac{\ln x}{1+\ln^2 x}$. Donc la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = \frac{K}{1+\ln^2 x} + \frac{\ln x}{(1+\ln^2 x)} = \frac{K+\ln x}{1+\ln^2 x}$, $K \in \mathbb{R}$.

6. $xy' + 6y - 3xy^4 = 0$ [26].

Une équation de Bernoulli est de la forme : $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, où $n \neq 0, 1$. Ici, nous pouvons réécrire l'équation [26] sous cette forme :

Pour $x \neq 0$ [26] $\Rightarrow y' + \frac{6}{x}y = 3y^4$ (Une équation de Bernoulli avec ($P(x) = \frac{6}{x}$, $Q(x) = 3$ et $n = 4$) [26]).

Pour résoudre l'équation [26] on effectue le changement de variable : $z = y^{1-n} = y^{-3}$, alors $z' = \frac{d}{dx}(y^{-3}) = -3y^{-4}y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}y^4 z'$. En substituant dans l'équation [26] les expressions de y et de y' , on obtient $-\frac{1}{3}xz' + 6z - 3x = 0 \Rightarrow xz' + 18z - 9x = 0$. Pour $x \neq 0$, l'équation $xz' + 18z - 9x = 0 \Leftrightarrow z' - \frac{18}{x}z = -9$ (équation linéaire de premier ordre). Pour la résolution, nous allons résoudre l'équation homogène (sans second membre) suivante : $z' - \frac{18}{x}z = 0$.

▷ Il est clair que $z=0$ est une solution (solution triviale). Supposant maintenant que $z \neq 0$, alors $z' - \frac{18}{x}z = 0 \Rightarrow z' = \frac{18}{x}z \Rightarrow \frac{1}{z}z' = \frac{18}{x} \Rightarrow \frac{1}{z}dz = \frac{18}{x}dx \Rightarrow \int \frac{1}{z}dz = \int \frac{18}{x}dx \Rightarrow \ln|z| = 18 \ln|x| + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|z| = \ln x^{18} + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = e^C x^{18}, C \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \pm e^C x^{18}, C \in \mathbb{R}$. Comme $z = 0$ est une solution, alors, la solution homogène est : $z = kx^{18}$, $k \in \mathbb{R}$.

▷ Pour déterminer la solution générale, nous allons appliquer la méthode de la variation de la constante afin d'obtenir la solution particulière de l'équation $z' - \frac{18}{x}z = -9$. Pour ce faire on pose $z_p = k(x)x^{18}$, alors $z_p' = k(x)'x^{18} + 18k(x)x^{17}$.

Comme z_p est une solution particulière de $z' - \frac{18}{x}z = -9$, alors $k(x)'x^{18} + 18k(x)x^{17} - \frac{18}{x}k(x)x^{18} = -9 \Rightarrow k(x)'x^{18} + 18k(x)x^{17} - 18k(x)x^{17} = -9 \Rightarrow k(x)'x^{18} = -9 \Rightarrow k(x)' = -9x^{-18} \Rightarrow k(x) = \frac{9}{17}x^{-17} \Rightarrow z_p = \frac{9}{17}x^{-17}x^{18} = \frac{9}{17}x$. alors la solution générale de l'équation différentielle linéaire est $z = kx^{18} + \frac{9}{17}x, k \in \mathbb{R}$.

Comme $z = \frac{1}{y^3}$, alors $y^3 = \frac{1}{z} = \frac{1}{kx^{18} + \frac{9}{17}x}, k \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{1}{(kx^{18} + \frac{9}{17}x)^{\frac{1}{3}}}, k \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ [31].

L'équation caractéristique de [31] est $r^2 - 3r + 2 = 0$ [31].

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$. Donc L'équation [31] admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Ainsi, la solution générale de [31] est : $y(x) = Ae^x + Be^{2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

2. $y'' + 2y' + y = 0$ [32].

L'équation caractéristique de [31] est $r^2 + 2r + 1 = 0$ [32].

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Donc L'équation [31] admet une racine réelle double $r = \frac{-2}{2} = -1$. Ainsi, la solution générale de [32] est : $y(x) = (A + Bx)e^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

3. $y'' - 2y' + 2y = 0$ [33].

L'équation caractéristique de [33] est $r^2 - 2r + 2 = 0$ [31].

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$. Donc L'équation $\boxed{31}'$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{33}$ est :
 $y(x) = (A \sin x + B \cos x)e^x, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

4. $y'' - 2\lambda y' + y = 0$ $\boxed{34}$.

L'équation caractéristique de $\boxed{34}$ est $r^2 - 2\lambda r + 1 = 0$ $\boxed{34}'$.

$\Delta = 4\lambda^2 - 4$.

• Si $\lambda \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $\Delta > 0$ et l'équation $\boxed{34}'$ admet deux racines réelles distinctes : $r_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$ et $r_2 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{34}$ est : $y(x) = Ae^{(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})x} + Be^{(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

• Si $\lambda \in \{-1, 1\}$, alors $\Delta = 0$ et l'équation $\boxed{34}'$ admet une racine réelle double $r = \lambda$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{34}$ est : $y(x) = (A + Bx)e^{\lambda x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

• Si $\lambda \in]-1, 1[$, alors $\Delta < 0$ et l'équation $\boxed{34}'$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2}$ et $r_2 = \lambda - i\sqrt{1 - \lambda^2}$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{34}$ est : $y(x) = (A \sin(\sqrt{1 - \lambda^2} x) + B \cos(\sqrt{1 - \lambda^2} x)) e^{\lambda x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 :

1. $y'' - y = x^2 + x + 1$ $\boxed{41}$.

L'équation homogène associée à $\boxed{41}$ est : $y'' - y = 0$ $\boxed{41}'$.

L'équation caractéristique de $\boxed{41}'$ est : $r^2 - 1 = 0$ $\boxed{41}''$.

$\boxed{41}''$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{41}'$ est : $y(x) = Ae^{-x} + Be^x, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de $\boxed{41}$** : Le second membre de l'équation $\boxed{41}$ est : $f(x) = x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)e^{0x}$. Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $\boxed{41}'$, alors on cherche une solution particulière de $\boxed{41}$ sous la forme : $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{0x} = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$. En substituant dans l'équation $\boxed{41}$, on obtient : $2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1$. Par identification, on obtient le système suivant : $-a = 1, -b = 1, 2a - c = 1 \Rightarrow a = -1, b = -1$ et $c = -3$. Donc la solution particulière de $\boxed{41}$ est : $y_p(x) = -x^2 - x - 3$.

▷ **Solution générale de $\boxed{41}$** :

$y_g(x) = y_p(x) + y(x) = -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^x, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

2. $y'' - 2y' - 8y = e^x$ $\boxed{42}$.

L'équation homogène associée à $\boxed{42}$ est : $y'' - 2y' - 8y = 0$ $\boxed{42}'$.

L'équation caractéristique de $\boxed{42}'$ est : $r^2 - 2r - 8 = 0$ $\boxed{42}''$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0$. Donc $\boxed{42}''$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 4$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{42}'$ est :
 $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{4x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de $\boxed{42}$** : Le second membre de l'équation $\boxed{42}$ est : $f(x) = e^x = e^{1x}$. Comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $\boxed{42}'$, alors on cherche une solution particulière de $\boxed{42}$ sous la forme : $y_p(x) = ae^x, \quad a \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = ae^x$ et $y_p''(x) = ae^x$. En substituant dans l'équation $\boxed{42}$, on obtient : $ae^x - 2ae^x - 8ae^x = e^x$. Par identification, on obtient $-9a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$. Donc la solution particulière de $\boxed{42}$ est : $y_p(x) = -\frac{1}{9}e^x$.

▷ **Solution générale de $\boxed{42}$** :

$$y_g(x) = y_p(x) + y(x) = -\frac{1}{9}e^x + Ae^{-2x} + Be^{4x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3. $y'' - 2y' = \sin x$ [43].

L'équation homogène associée à [43] est : $y'' - 2y' = 0$ [43'].

L'équation caractéristique de [43'] est : $r^2 - 2r = 0$ [43''].

[43''] admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de [43'] est : $y(x) = A + Be^{2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de [43]** : Le second membre de l'équation [43] est : $f(x) = \sin x = \sin(1x)e^{0x}$. Comme $0 + 1i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique [43'], alors on cherche une solution particulière de [43] sous la forme : $y_p(x) = a \sin x + b \cos x$, $a, b \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = a \cos x - b \sin x$ et $y_p''(x) = -a \sin x - b \cos x$. En substituant dans l'équation [43], on obtient : $(-a \sin x - b \cos x) - 2(a \cos x - b \sin x) = \sin x$. Par identification, on obtient $-a + 2b = 1$, $-b - 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$. . Donc la solution particulière de [43] est : $y_p(x) = -\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x$.

▷ **Solution générale de [43]** :

$$y_g(x) = y(x) + y_p(x) = A + Be^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

4.

$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ [44].

L'équation homogène associée à [44] est : $y'' - 4y' + 3y = 0$ [44'].

L'équation caractéristique de [44'] est : $r^2 - 4r + 3 = 0$ [44''].

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$. Donc [44''] admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de [44'] est : $y(x) = Ae^x + Be^{3x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de [44]** : Le second membre de l'équation [44] est : $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$. Comme -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique [44'], alors on cherche une solution particulière de [44] sous la forme : $y_p(x) = (ax + b)e^{-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$ et $y_p''(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}$. En substituant dans l'équation [44], on obtient : $(ax - 2a + b)e^{-x} - 4(-ax + a - b)e^{-x} + 3(ax + b)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x}$. Par identification, on obtient $8a = 2$, $-6a + 8b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{5}{16}$. . Donc la solution particulière de [44] est : $y_p(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{16})e^{-x}$.

▷ **Solution générale de [44]** :

$$y_g(x) = y_p(x) + y(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{16})e^{-x} + Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

▷ **Application aux conditions initiales** :

On a : $y(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0$ (1). De plus, la dérivée de $y_g(x)$ est :

$$y'(x) = (-\frac{1}{4}x - \frac{1}{16})e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x}. \text{ Donc}$$

$y'(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{16} + A + 3B = 0$ (2). En résolvant le système formé par (1) et (2), on obtient : $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{16}$.

▷ **Solution finale du problème de Cauchy** :

$$y_g(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{16})e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{16}e^{3x}.$$

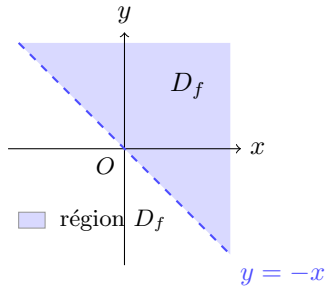
Analyse II

Université A.MIRA-Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

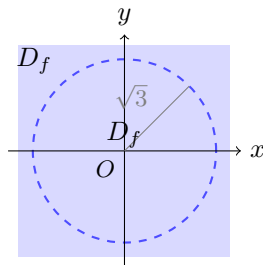
✂– Corrigé de la Série de TD numéro 3–✂

Exercice 1 : Domaine de définition :

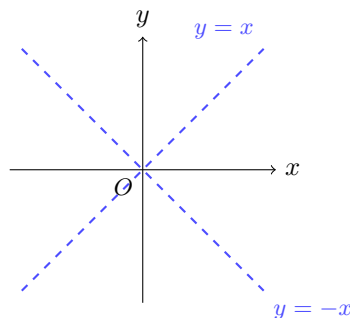
1. Le domaine de définition de la fonction $f(x, y) = \ln(x + y)$ est $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$. La représentation graphique de D_f est donnée par la Figure suivante :



2. Le domaine de définition de la fonction $f(x, y) = \frac{y - 2x^2}{x^2 + y^2 - 3}$ est $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 3\}$. C'est à dire le dénominateur ne doit pas s'annuler : ($x^2 + y^2 - 3 \neq 0 \iff x^2 + y^2 \neq 3$). La représentation graphique de D_f est donnée par la Figure suivante :



3. Le domaine de définition de la fonction $f(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$ est $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \text{ ou } y = -x\}$. C'est-à-dire le dénominateur ne doit pas s'annuler ($x^2 - y^2 \neq 0$). D_f est tout le plan \mathbb{R}^2 privé des deux droites $y = x$ et $y = -x$ (en pointillés). La représentation graphique de D_f est donnée par la Figure suivante :



Exercice 2 : Limites en $(0, 0)$

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$.

▷ Si on prend le chemin $x = 0$, on obtient $f(0, y) = \frac{e^{0y} - 1}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$.

▷ Si on prend le chemin $y = 0$, on obtient $f(x, 0) = \frac{e^{x0} - 1}{x^2 + 0^2} = \frac{0}{x^2} = 0$.

▷ Si on prend le chemin $y = x$, on obtient $f(x, x) = \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2}$. Or

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots$, donc $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ au voisinage de 0, alors

$\frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} \sim \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2} \neq 0$, donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas. (On

peut aussi utiliser la règle de l'Hôpital pour montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}$).

Comme deuxième méthode (utilisation des coordonnées polaires), on pose $x = r \cos \theta$

et $y = r \sin \theta$, alors $f(x, y) = f(r, \theta) = \frac{e^{r^2 \cos \theta \sin \theta} - 1}{r^2}$. Pour $r \rightarrow 0$ on peut utiliser

l'approximation $e^u - 1 \sim u$ (avec u assez petit), alors $e^{r^2 \cos \theta \sin \theta} - 1 \sim r^2 \cos \theta \sin \theta$.

Donc $f(r, \theta) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ dépend de θ , alors

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

▷ Si on prend le chemin $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient

$$f(x, \lambda x) = \frac{x^2 - \lambda^2 x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{(1 - \lambda^2)x^2}{(1 + \lambda^2)x^2} = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$, qui dépend de λ . Par exemple :

– pour $\lambda = 0$ (chemin $y = 0$) : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$,

– pour $\lambda = 1$ (chemin $y = x$) : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 0$.

Les deux limites sont différentes, donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$. On prend le chemin $y^2 = \lambda x^3$, $\lambda \in \mathcal{R}$, on obtient

$$f(x, y)|_{y^2 = \lambda x^3} = \frac{x^3 \cdot \lambda x^3}{x^6 + \lambda^2 x^6} = \frac{\lambda x^6}{x^6(1 + \lambda^2)} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$, qui dépend de λ , donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4}$.

▷ Si on prend le chemin $x = 0$, on obtient

$$f(0, y) = \frac{0^3 + y^3}{0^2 + y^4} = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y} \rightarrow \infty \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

▷ Si on prend le chemin $y = 0$, on obtient

$$f(x, 0) = \frac{x^3 + 0^3}{x^2 + 0^4} = \frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y)(y^2 - x)}{x + y}$. On remarque que $(x^2 - y)(y^2 - x) = x^2y^2 - x^3 - y^3 + xy$.

En polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $\cos \theta + \sin \theta \neq 0$:

$$f = \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - r^3 \cos^3 \theta - r^3 \sin^3 \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta}{r(\cos \theta + \sin \theta)}.$$

Le terme dominant au numérateur est d'ordre r^2 , donc le quotient est d'ordre $r \rightarrow 0$.

$$\boxed{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.}$$

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Continuité de f en $(0, 0)$.

▷ Si on pose $y = x$, on trouve $f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

▷ Si on pose $y = 2x$, on trouve $f(x, y) = f(x, 2x) = \frac{2x^2}{5x^2} = \boxed{\frac{2}{5}}$. Comme les deux limites

sont différentes ($\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$), donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas, par conséquent la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. Existence des dérivées partielles en $(0, 0)$.

a. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$

b. $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$

a et b montrent bien que les dérivées partielles du premier ordre existent.

3. Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a :

a. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \boxed{\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}}.$

▷ Le long de $y = x$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \frac{x(x^2 - x^2)}{(2x^2)^2} = 0 \rightarrow 0$, le long de $y = 2x$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 2x) = \frac{2x(4x^2 - x^2)}{(5x^2)^2} = \frac{6x^3}{25x^4} = \frac{6}{25x} \rightarrow \infty$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

b. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \boxed{\frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}}.$

▷ Le long de $x = y$: $\frac{\partial f}{\partial y}(y, y) = \frac{y(y^2 - y^2)}{(2y^2)^2} = 0 \rightarrow 0$, le long de $x = 2y$:

$\frac{\partial f}{\partial y}(2y, y) = \frac{2y(4y^2 - y^2)}{(4y^2 + y^2)^2} = \frac{6y^3}{25y^4} = \frac{6}{25y} \rightarrow \infty$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

4. Différentiabilité de f en $(0, 0)$. f n'est pas continue en $(0, 0)$, donc f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
-

Exercice 4 :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Continuité de f en $(0, 0)$. Si on pose $(x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, avec $r \geq 0$), on trouve :

$$f(x, y) = \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = r \cos^2 \theta \sin \theta \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \text{ Car } |\cos^2 \theta \sin \theta| \leq 1, \forall \theta.$$

Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, et f est continue en $(0, 0)$.

2. Dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.

a. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$

b. $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$

3. Classe C^1 . Pour que f soit de classe C^1 , il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient continues sur \mathbb{R}^2 .

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a :

1. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2 y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$

▷ Si on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, $r \geq 0$, on trouve $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$

$$\frac{2r^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{r^4} = 2 \cos \theta \sin^3 \theta \leq 2. \text{ Comme } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ dépend de } \theta, \text{ alors la}$$

limite n'existent pas en $(0, 0)$. donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x^2(x^2 + y^2) - 2y^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$

▷ Si on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, $r \geq 0$, on trouve $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

$$\frac{r^2 \cos^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)}{r^4} = \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \text{ Comme } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ dépend de}$$

θ , alors la limite n'existent pas en $(0, 0)$. donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ne sont pas continues en $(0, 0)$, alors la fonction f n'est pas de C^1 .

4. Différentiabilité en $(0, 0)$. On dit que f est différentiable en (a, b) s'il existe une application linéaire (unique) notée $df_{(a,b)}$ telle que :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + df_{(a,b)}(h, k) + \|(h, k)\| \epsilon(h, k) \quad \text{tel que} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h, k) = 0.$$

Avec $\|(h, k)\|$ est la norme $\| \cdot \|_2$ donnée par $\|(h, k)\|_2 = \sqrt{h^2 + k^2}$.

On a $df_{(a,b)}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) k$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$,

alors $f(h, k) = f(0, 0) + df(0, 0)(h, k) + \|(h, k)\|\epsilon(h, k) \implies f(h, k) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k + \|(h, k)\|\epsilon(h, k)$. Donc on obtient :

$$\epsilon(h, k) = \frac{f(h, k) - f(0, 0)}{\|(h, k)\|} = \frac{1}{\|(h, k)\|} \cdot \frac{h^2 k}{h^2 + k^2} = \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}}.$$

En posant $h = k$:

$$\epsilon(h, h) = \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{h^3}{2\sqrt{2}h^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Donc $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h, k) \neq 0$, et par conséquent f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. **Une**

autre Méthode : En polaires : Si on pose $h = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r \geq 0$, on trouve $\epsilon(h, h) = \epsilon(r, \theta) = \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^3} = \cos^2 \theta \sin \theta$, qui dépend de θ . Donc cette limite n'est pas nulle en général, et f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

5. Gradient et matrice Hessienne en $(1, 1)$.

▷ Gradient : Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a calculé :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \text{ Donc en } (1, 1) :$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{0}{4} = 0.$$

$$\text{On a } \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}. \text{ Donc } \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

▷ Pour la Hessienne, on calcule les dérivées secondes.

$$\text{a. } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{2y^3(x^2 + y^2)^2 - 2xy^3 \cdot 4x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \boxed{\frac{2y^3(x^2 + y^2 - 4x^2)}{(x^2 + y^2)^3}}.$$

$$\text{En } (1, 1) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = \frac{2(1 - 3)}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{b. } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{-2x^2y(x^2 + y^2)^2 - x^2(x^2 - y^2) \cdot 4y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x^2y[x^2 + y^2 + 2(x^2 - y^2)]}{(x^2 + y^2)^3} = \boxed{\frac{-2x^2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}}.$$

$$\text{En } (1, 1) : \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = \frac{-2(3 - 1)}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{c. } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{6xy^2(x^2 + y^2)^2 - 2xy^3 \cdot 4y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{2xy^2(3(x^2 + y^2) - 4y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$= \boxed{\frac{2xy^2(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}}. \text{ En } (1, 1) : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{2(3 - 1)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{d. } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{2(x(x^2 - y^2) + 2x^3)(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2)x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(4x^3 - 2xy^2)(x^2 + y^2) - 4x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x(x^2 - y^2) + 2x^3(x^2 + y^2) - 4x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \\
&= 2x \frac{(2x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \\
&= 2x \frac{2x^4 + 2x^2y^2 - y^2x^2 - y^4 - 2x^4 + 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^3} \\
&= 2x \frac{3x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^3} = \boxed{\frac{2xy^2(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}}.
\end{aligned}$$

En $(1, 1)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = \frac{2(3-1)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

▷ La Matrice hessienne de f en $(1, 1)$ est

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

6. Différentielle $df_{(a,b)}$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$df_{(a,b)}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) k = \frac{2ab^3}{(a^2 + b^2)^2} h + \frac{a^2(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2} k.$$

Pour $(a, b) = (1, 1)$: $df_{(1,1)} = \frac{h}{2}$.