# Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

## ✠– EXAMEN–✠

**Exercice 1** : (**5 pts**)
On considère les intégrales définies :

$$I = \int_0^\pi e^x \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi e^x \sin^2 x \, dx.$$

1. Calculer $I + J$.
2. En appliquant la méthode d'intégration par parties deux fois, calculer $I - J$.
3. En déduire la valeur de $I$ et $J$.

Indication : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

---

**Exercice 2** : (**7 pts**)
1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2xy = (1 - 2x)e^x.$$

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = g(x) \qquad E_1.$$

a. Résoudre l'équation homogène (sans second membre) associée à $E_1$.
b. Trouver une solution particulière de $E_1$ dans les cas suivants :
- g(x) $= e^{-2x}$.
- g(x) $= e^{2x}$.

---

**Exercice 3** : (**8 pts**)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0,0)$ ? $f$ est-elle de classe $C^1$ en (0, 0) ?
4. La fonction $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$ ?
5. Calculer le gradient de $f$ en $(1,1)$.
6. Exprimer la différentielle $df_{(a,b)}$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Bonne Chance

## ✠– Corrigé de l'examen–✠

**Exercice 1** : On considère les intégrales : $I = \int_0^\pi e^x \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \sin^2 x \, dx$.

1. Calcul de $I + J$ :

$I + J = \int_0^\pi e^x \cos^2 x \, dx + \int_0^\pi e^x \sin^2 x \, dx = \int_0^\pi e^x (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^\pi e^x \, dx = e^x \Big|_0^\pi = e^\pi - e^0 = \boxed{e^\pi - 1}$.

2. Calcul de $I - J$ par intégration par parties :

$I - J = \int_0^\pi e^x (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int_0^\pi e^x \cos(2x) \, dx$.

**Première intégration par parties** : $\begin{cases} u = \cos(2x) \implies du = -2\sin(2x) \, dx \\ dv = e^x \, dx \implies v = e^x \end{cases}$ . Alors :

$\int_0^\pi e^x \cos(2x) \, dx = e^x \cos(2x) \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi e^x \sin(2x) \, dx = (e^\pi - 1) + 2 \int_0^\pi e^x \sin(2x) \, dx$

**Deuxième intégration par parties** pour le terme restant ($2 \int_0^\pi e^x \sin(2x) \, dx$) :

$\begin{cases} u = \sin(2x) \implies du = 2\cos(2x) \, dx \\ dv = e^x \, dx \implies v = e^x \end{cases}$ . Alors :

$\int_0^\pi e^x \sin(2x) \, dx = e^x \sin(2x) \Big|_0^\pi - 2 \int e^x \cos(2x) \, dx = -2 \int e^x \cos(2x) \, dx$. En substituant dans la première équation :

$\int_0^\pi e^x \cos(2x) \, dx = (e^\pi - 1) - 4 \int_0^\pi e^x \cos(2x) \, dx \Rightarrow 5 \int_0^\pi e^x \cos(2x) \, dx = (e^\pi - 1)$

$\Rightarrow I - J = \int_0^\pi e^x \cos(2x) \, dx = \boxed{\dfrac{e^\pi - 1}{5}}$

### 3. Calcul de $I$ et $J$

Nous avons le système :

$$\begin{cases} I + J = e^\pi - 1 \\ I - J = \frac{e^\pi - 1}{5} \end{cases}$$

En additionnant les deux équations :

$$2I = (e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{5} = \frac{6}{5}(e^\pi - 1) \implies I = \boxed{\frac{3}{5}(e^\pi - 1)}$$

En soustrayant la seconde équation de la première :

$$2J = (e^\pi - 1) - \frac{e^\pi - 1}{5} = \frac{4}{5}(e^\pi - 1) \implies J = \boxed{\frac{2}{5}(e^\pi - 1)}$$

---

**Exercice 2** :

1. Résolution de l'équation différentielle $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$.

• Solution de l'équation homogène $y' = 2xy = 0$.

Il est clair que $y_h = 0$ est une solution. Pour $y \neq 0$, on a $\dfrac{y'}{y} = 2x \Rightarrow \dfrac{1}{y}\,dy = 2x\,dx \Rightarrow$
$\int \dfrac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + c$, avec $c \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^c \cdot e^{x^2} \Rightarrow y = \pm e^c \cdot e^{x^2}$, avec la solution triviale $y = 0$, on obtient $y_h = ke^{x^2}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
• Solution particulière de $y' - 2xy = (1-2x)e^x$. (variation de la constante).
Posons $y_p = k(x)e^{x^2} \Rightarrow y_p\prime = k'(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2}$. En remplaçant $y$ et $y'$ dans l'équation $y' - 2xy = (1-2x)e^x$, on obtient $k'(x)e^{x^2} = (1-2x)e^x \Rightarrow k'(x) = (1-2x)e^{(x-x^2)} \Rightarrow$
$k(x) = \int (1-2x)e^{(x-x^2)}\,dx = e^{x-x^2} \Rightarrow y_p = e^{(x-x^2)} \cdot e^{x^2} = e^x$.
• La solution générale est $y_g = y_h + y_p = ke^{x^2} + e^x$, avec $k \in \mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = g(x) \qquad\qquad E_1.$$

a. Solution de l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Posons $y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$, donc $(r^2 - 4r + 4)e^{rx} = 0 \Rightarrow$
$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$. Comme l'équation caractéristique associée à l'équation homogène admet une solution réelle double, alors la solution homogène est donnée par $y_h = (Ax+B)e^{2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

b. Solution particulière de $E_1$.
• La solution particulière pour $g(x) = e^{-2x}$ est de la forme $y_1 = a \cdot e^{-2x} \Rightarrow$
$y_1' = -2a \cdot e^{-2x}$ et $y_1'' = 4a \cdot e^{-2x}$. Remplaçant $y''$, $y'$ et $y$ dans $E_1$, on trouve
$4a \cdot e^{-2x} + 8a \cdot e^{-2x} + 4a \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow 16a \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow 16a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{16}$.
Alors $\boxed{y_1 = \dfrac{e^{-2x}}{16}}$.
• La solution particulière $g(x) = e^{2x}$ est de la forme $y_2 = bx^2 \cdot e^{2x} \Rightarrow$
$y_2' = 2bx \cdot e^{2x} + 2bx^2 \cdot e^{2x} = 2b(x^2 + x) \cdot e^{2x}$ et
$y_2'' = 2b \cdot e^{2x} + 4bx \cdot e^{2x} + 4bx \cdot e^{2x} + 4bx^2 \cdot e^{2x} = 2b(2x^2 + 4x + 1) \cdot e^{2x}$. Remplaçant $y''$, $y'$ et $y$ dans $E_1$, on trouve $(2b(2x^2+4x+1) - 8b(x^2+x) + 4bx^2) \cdot e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow$
$(4bx^2 + 8bx + 2b - 8bx^2 - 8bx + 4bx^2) = 1 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$. Alors $\boxed{y_2 = \dfrac{x^2 \cdot e^{2x}}{2}}$.

---

**Exercice 3 :** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. **Continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$ :**

   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $f$ est une fraction de fonctions polynomiales avec un dénominateur $x^2 + y^2 \neq 0$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   Étudions la continuité en $(0,0)$. On cherche :
   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$.
   En coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, alors
   $f(x,y) = \frac{r\cos\theta(r\sin\theta)^3}{r^2} = r^2\cos\theta\sin^3\theta$. Donc,
   $\lim_{r\to0} f(x,y) = \lim_{r\to0} r^2\cos\theta\sin^3\theta = 0$ (indépendante de $\theta$ ). Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, alors $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. **Dérivées partielles en $(0,0)$ :** Par définition on a :
   $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{0-0}{h} = 0$,
   $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{0-0}{h} = 0$.

3. **Continuité des dérivées partielles et classe $C^1$ :**

   On a :
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2)-xy^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}}$,
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2)-xy^3(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$.
   • Pour $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, on a :
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
   En coordonnées polaires, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on obtient :
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{r^3\sin^3\theta(r^2\sin^\theta - r^2\cos^2\theta)}{r^4} = r\sin^3\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$. Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.
   Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en $(0,0)$.
   • Pour $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$, on a :
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. En coordonnées polaires, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on obtient :
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta(3r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)}{r^4} = r\cos\theta\sin^2\theta(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)$. Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en $(0,0)$. Comme les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en $(0,0)$, alors $f \in C^1$ en $(0,0)$.

4. **Différentiabilité de $f$ en $(0,0)$ :**
   Comme $f \in C^1$ en $(0,0)$, alors $f$ est différentiable en $(0,0)$. On peu aussi vérifier la différentiablité de $f$ en $(0,0)$ comme suit : $f$ est continue en $(0,0)$, ses dérivées partielles existent et sont nulles. On pose
   $R(x,y) = f(x,y) - (f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y) = f(x,y)$. En coordonnées polaire :
   $R(x,y) = f(x,y) = r^2\cos\theta\sin^3\theta$, donc $\frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = r\cos\theta\sin^3\theta$. Ainsi, $\frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.
   Donc $f$ est différentiable en $(0,0)$.

5. **Gradient en $(1,1)$ :** On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1^3(1-1)}{4} = 0$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1\cdot 1^2(3+1)}{4} = 1$. Donc
   $$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. **Différentielle de $f$ en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ :** Si $(a,b) \neq (0,0)$, alors $f$ est $C^\infty$, donc différentiable, et on a :
   $df_{(a,b)}(h,k) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \Rightarrow df_{(a,b)}(h,k) = h \cdot \frac{b^3(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2} + k \cdot \frac{ab^2(3a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}$

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

# Analyse II

## ✠– Examen de remplacement–✠

**Exercice 1** : (**5 pts**)
On considère l'intégrale définie :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer $I_0$.
2. En appliquant la méthode d'intégration par parties, calculer $I_n$ en fonction de $I_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $\int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x}\, dx$.

---

**Exercice 2** : (**7 pts**)
1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + y \tan x = \sin x \cos x \qquad\qquad E_1.$$

   a. Résoudre l'équation homogène (sans second membre) associée à $E_1$.
   b. En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de $E_1$ puis donner l'ensemble de toutes les solutions de $E_1$.
   c. Donner la solution de $E_1$ vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1.$$

---

**Exercice 3** : (**8 pts**)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0,0)$ ? $f$ est-elle de classe $C^1$ en $(0, 0)$ ?
4. La fonction $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$ ?
5. Calculer le gradient et la matrice hessienne de $f$ en $(2,1)$.
6. Exprimer la différentielle $df_{(a,b)}$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Bonne Chance

# Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

## ✠– Examen de rattrapage–✠

**Exercice 1** : (**7 pts**)

1. On considère les intégrales définies :

$$I = \int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi x^2 \sin^2 x \, dx.$$

   a. Calculer $I + J$.
   b. Calculer $I - J$.
   c. En déduire la valeur de $I$ et $J$.

2. Soit $f$ une fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$.

   a. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
   b. Calculer $\int f(x) \, dx$.
   c. Calculer $\int f(2x+1) \, dx$.

---

**Exercice 2** : (**8 pts**)

1. Soit $x \in ]1 + \infty[$ et considérons l'équation différentielle suivante :

$$y' + \frac{y}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x} \qquad E_1.$$

   a. Résoudre l'équation homogène associée à $E_1$.
   b. Résoudre l'équation $E_1$.

2. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' + y = (6x+2)e^{-x} \qquad E_2.$$

   a. Résoudre l'équation homogène (sans second membre) associée à $E_2$.
   b. Résoudre l'équation $E_2$.

---

**Exercice 3** : (**5 pts**)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
3. Étudier l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.
4. La fonction $f$ est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$ ?

Bon Courage

# Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

## ✠– Corrigé de l'examen de rattrapage–✠

**Exercice 1** :

1. On considère les intégrales : $I = \int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^\pi x^2 \sin^2 x \, dx$.

   a. Calcul de $I + J$ :

   $$I + J = \int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx + \int_0^\pi x^2 \sin^2 x \, dx = \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi = \boxed{\frac{\pi^3}{3}}.$$

   b. Calcul de $I - J$ par intégration par parties :
   $I - J = \int_0^\pi x^2(\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int_0^\pi x^2 \cos(2x) \, dx$.
   **Première intégration par parties** : $\begin{cases} u = x^2 \implies du = 2x\,dx \\ dv = \cos(2x) \implies v = \frac{\sin(2x)\,dx}{2} \end{cases}$. Alors :
   $\int_0^\pi x^2 \cos(2x) \, dx = \frac{x\cos(2x)}{2}\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \sin(2x) \, dx$.
   **Deuxième intégration par parties** pour le terme restant $(2\int_0^\pi x\sin(2x)\,dx)$ :
   $\begin{cases} u = x\sin(2x) \implies du = dx \\ dv = \sin(2x) \implies v = -\frac{\cos(2x)\,dx}{2} \end{cases}$. Alors : $\int_0^\pi x\sin(2x)\,dx =$
   $-\frac{x\sin(2x)}{2}\Big|_0^\pi + \int \frac{\cos(2x)\,dx}{2} =$ -$\frac{x\sin(2x)}{2}\Big|_0^\pi + \frac{\cos(2x)}{4}\Big|_0^\pi$. $\implies \int_0^\pi x^2\cos(2x)\,dx =$
   $\frac{x\cos(2x)}{2}\Big|_0^\pi + \frac{x\sin(2x)}{2}\Big|_0^\pi$-$\frac{\cos(2x)}{4}\Big|_0^\pi$. $\implies \int_0^\pi x^2\cos(2x)\,dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

   c. Calcul de $I$ et $J$ : Nous avons le système :

   $$\begin{cases} I + J = \frac{\pi^3}{3} \\ I - J = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   En additionnant les deux équations :

   $$2I = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} \implies I = \boxed{\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}}$$

   En soustrayant la seconde équation de la première :

   $$2J = \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2} \implies J = \boxed{\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}}$$

2. Considérons la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$.

   a. On a $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x+1)(x+2)$, donc $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.
   - $\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = a + \frac{b\cdot x}{x+1} + \frac{c\cdot x}{x+2}$. Pour $x = 0$, on trouve $a = \frac{1}{2}$.
   - $\frac{2x+1}{(x)(x+2)} = \frac{a\cdot(x+1)}{x} + b + \frac{c\cdot(x+1)}{x+2}$. Pour $x = -1$, on trouve $b = 1$.
   - $\frac{2x+1}{(x)(x+1)} = \frac{a\cdot(x+2)}{x} + \frac{b\cdot(x+2)}{x+1} + c$. Pour $x = -2$, on trouve $c = -\frac{3}{2}$.

Donc $f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x+1}-\frac{3}{2(x+2)}$.

b. $\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{2x}\,dx+\int\frac{1}{x+1}\,dx-\int\frac{3}{2(x+2)}\,dx \implies$
$\int f(x)\,dx=\frac{\ln|x|}{2}+\ln|x+1|-\frac{3\ln|x+2|}{2}+C$, avec $c\in\mathbb{R}$.

c. On pose $y=2x+1 \implies dy=2\,dx \implies dx=\frac{dy}{2}$. On remplace dans $\int f(2x+1)\,dx$ on trouve $\int f(2x+1)\,dx=\frac{1}{2}\int f(y)\,dy=$
$\frac{1}{4}\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|y+1|-\frac{3}{4}\ln|y+2|+C$, avec $C\in\mathbb{R}$.
Par suite $\int f(2x+1)\,dx=\frac{1}{4}\ln|2x+1|+\frac{1}{2}\ln|2x+2|-\frac{3}{4}\ln|2x+3|+C$, avec $C\in\mathbb{R}$.

---

**Exercice 2** :

1. Soit $x\in]1,+\infty[$ et considérons l'équation suivante : $y'+\frac{y}{x\ln x}=\frac{1}{\ln x}$ $\qquad E_1$.
   a. Résolution de l'équation homogène associée à $E_1$.
   l'équation homogène est $y'+\frac{y}{x\ln x}=0$ $\qquad E_1'$. Il est clair que $y_h=0$ est une solution. Pour $y\neq 0$, on a $\dfrac{y'}{y}=-\frac{1}{x\ln x}\Rightarrow \dfrac{1}{y}\,dy=-\frac{1}{x\ln x}\,dx\Rightarrow \ln|y|=-\ln|y|+c$, avec $c\in\mathbb{R}\Rightarrow |y|=\frac{e^C}{\ln x}$, avec $C\in\mathbb{R}\Rightarrow y=\pm e^C\cdot\frac{1}{\ln x}$. Avec la solution triviale $y=0$, on obtient $y_h=\frac{k}{\ln x}$, avec $k\in\mathbb{R}$.
   b. Résolution de l'équation non homogène ($E_1$ ).
   $y_p=\frac{k(x)}{\ln x}\Rightarrow y'=\frac{k'(x)\ln x-\frac{k(x)}{x}}{(\ln x)^2}$. Par suite $y'+\frac{y}{x\ln x}=\frac{1}{\ln x}\Rightarrow \frac{k(x)'}{\ln x}$-$\frac{k(x)}{x(\ln x)^2}+\frac{k(x)}{x(\ln x)^2}$ $=\frac{1}{\ln x}\Rightarrow k(x)'=1\Rightarrow k(x)=x\Rightarrow y_p=\frac{x}{\ln x}$. Donc la solution générale de $E_1$ est $y_g=y_h+y_p=\frac{x+k}{\ln x}, avec k\in\mathbb{R}$.
2. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :
   $y''-2y'+y=(6x+2)e^{-x}$ $\qquad E_2$.
   a. Résolution de l'équation homogène associée à $E_2$.
   L'équation homogène est $y''-2y'+y=0$ $\qquad E'^2$, son équation caractéristique est donnée par $r^2-2r+1=0$. Comme $r^2-2r+1=0$ admet une racine réelle double, alors la solution homogène est donnée par $y_h=(Ax+B)e^x$, avec $A,B\in\mathbb{R}$.
   b. Résolution de $E_2$. Comme le second membre est égal à $(6x+2)e^{-x}$, et que $-1$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors la solution particulière de $E_2$ est donnée par $y_p=(ax+b)e^{-x}$, donc $y_p'=(-ax+a-b)e^{-x}$ et $y_p''=(ax+b-2a)e^{-x}$.
   Donc $((ax+b-2a)-2(-ax+a-b)+ax+b)e^{-x}=(6x+2)e^{-x}\Rightarrow$
   $4ax+4(b-a)=6x+2\Rightarrow a=\frac{3}{2}$ et $b=2\Rightarrow y_p=(\frac{x}{2}+2)e^{-x}$. Par suite
   $y_g=y_h+y_p=(Ax+B)e^x+(\frac{x}{2}+2)e^{-x}$, avec $A,B\in\mathbb{R}$.

---

**Exercice 3** : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$

   Pour $(x,y)\neq(0,0)$, $f$ est une fraction de fonctions polynomiales avec un dénominateur $x^2+y^2\neq 0$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   Étudions la continuité en $(0,0)$. On cherche : $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x^2+y^2}$.
   Pour $y=x$, on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,x)$. On a $f(x,x)=\frac{1}{2x}\to 0$ quand $x\to 0$, alors la la limite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ n'existe pas. Donc $f$ n'est pas continue en (0,0).

2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a :
   - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \boxed{\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}}$.
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \boxed{\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}$
3. Existence des dérivées partielles en $(0,0)$ : Par définition on a :
   $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$,
   $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} + \infty$. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas.
4. $f$ est de classe $C_1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En (0,0) $f$ n'est pas différentiable $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas (limite infinie) en $(0,0)$.