ZOUGAB. N

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Année universitaire 2017-2018
Juin 2018

Examen de MATHS 2
Durée : 2 heures

Exercice n° 1. *(4pts.)* Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$.
3. En déduire I_1 et I_2 et par suite la valeur de $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) e^{-x} dx$.

Exercice n° 2. *(5pts.)* Soit $x \in]1, +\infty[$ et considérons l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{\ln x}. \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (1).
2. Résoudre l'équation non homogène (1).
3. Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $y(2) = 1$.

Exercice n° 3. *(5pts.)* Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' + y = (6x + 2) e^x. \tag{2}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène correspondante.
2. Déterminer les constantes α et β pour que $y_p(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2) e^x$ soit une solution particulière de (2).
3. Déterminer la solution générale de (2).
4. Trouver la solution de l'équation (2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice n° 4. *(6pts.)* Soit la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A = I_3 - M$ et $B = I_3 + M + M^2$. Rappelons que $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.
3. En déduire que B est inversible et donner son inverse.
4. Résoudre le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ -5x - 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = -1, \end{cases}$$

   (a) en utilisant la méthode de la matrice inverse ;
   (b) en utilisant la méthode de Cramer.

Bon courage

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie, Département de Technologie

Année universitaire 2017-2018
Juin 2018

Corrigé de l'examen de MATHS 2

Exercice n° 1. Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculons I_0 : On a

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x}\big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

0.5

2. Montrons que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$: Posons

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x^{n+1} & \Longrightarrow & f'(x) = (n+1)x^n \\ g'(x) = e^{-x} & \Longrightarrow & g(x) = -e^{-x}. \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & -x^{n+1}e^{-x}\big|_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x} dx \\ & = & \dfrac{-1}{e} + (n+1)I_n. \end{array}$$

1.5

3. Déduction de I_1 et I_2 et par suite déduction de la valeur de $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)e^{-x} dx$: On a

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \frac{-1}{e} + (0+1)I_0 \\ & = & \frac{-1}{e} + (1 - \frac{1}{e}) \\ & = & 1 - \frac{2}{e}, \end{array}$$

0.5

$$\begin{array}{rcl} I_2 & = & \frac{-1}{e} + (1+1)I_1 \\ & = & \frac{-1}{e} + 2(1 - \frac{2}{e}) \\ & = & 2 - \frac{5}{e} \end{array}$$

0.5

et

$$\begin{array}{rcl} \int_0^1 (x^2 - 3x + 1)e^{-x} dx & = & I_2 - 3I_1 + I_0 \\ & = & 2 - \frac{5}{e} - 3 + \frac{6}{e} + 1 - \frac{1}{e} \\ & = & 0. \end{array}$$

1

Exercice n° 2. Soit $x \in]1, +\infty[$ et considérons l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{\ln x}. \tag{1}$$

1. Résolution de l'équation homogène associée à (1) : L'équation homogène associée est

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = 0 \ldots\ldots (E_0)$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{array}{lcrcl} \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x \ln x} & \Longrightarrow & \frac{dy}{y} & = & -\frac{dx}{x \ln x} \\ & \Longrightarrow & \ln|y| & = & -\ln|\ln x| + K_1, \ K_1 \in \mathbb{R} \\ & \Longrightarrow & y & = & \frac{C_1}{\ln x}, C_1 \in \mathbb{R}^*. \end{array}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E_0). Finalement, la solution générale de (E_0) est

$$y(x) = \frac{C}{\ln x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

2

2. Résolution de l'équation non homogène (1) : On fait varier la constante C et la solution générale de (1) sera $y(x) = \frac{C(x)}{\ln x}$.

On a $y' = \frac{C'(x)\ln x - \frac{1}{x}C(x)}{\ln^2 x} = \frac{C'(x)}{\ln x} - \frac{C(x)}{x\ln^2 x}$. Par suite

$$\begin{array}{rlcl} y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{\ln x} & \Longrightarrow \frac{C'(x)}{\ln x} - \frac{C(x)}{x\ln^2 x} + \frac{1}{x\ln x}.\frac{C(x)}{\ln x} & = & \frac{1}{\ln x} \\ & \Longrightarrow C'(x) & = & 1 \\ & \Longrightarrow C(x) & = & x + K, \ \ K \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Donc la solution générale de (1) est

$$y(x) = \frac{x+K}{\ln x}, \ K \in \mathbb{R}.$$

2

3. Trouvons la solution de l'équation (1) vérifiant $y(2) = 1$: On a

$$\begin{array}{rlcl} y(2) = 1 & \Longrightarrow \frac{2+K}{\ln 2} & = & 1 \\ & \Longrightarrow K & = & \ln 2 - 2. \end{array}$$

Finalement, la solution est

$$y(x) = \frac{x + \ln 2 - 2}{\ln x}.$$

1

Exercice n° 3. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' + y = (6x+2)e^x. \tag{2}$$

1. Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (2) : L'équation homogène associée à (2) est

$$y'' - 2y' + y = 0 \ \ldots\ldots\ldots.(E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

(C) admet la racine réelle double $r = 1$. Donc la solution générale de (E_0) est

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x)e^x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2

2. Détermination des constantes α et β pour que $y_p(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2)e^x$ soit une solution particulière de (2) : On a

$$y_p'(x) = [\alpha x^3 + (3\alpha+\beta)x^2 + 2\beta x]e^x \ \text{ et } \ y_p''(x) = [\alpha x^3 + (6\alpha+\beta)x^2 + (6\alpha+4\beta)x + 2\beta]e^x.$$

Donc on aura

$$\begin{array}{rcl} y_p'' - 2y_p' + y_p = (6x+2)e^x & \Leftrightarrow & [\alpha x^3 + (6\alpha+\beta)x^2 + (6\alpha+4\beta)x + 2\beta]e^x \\ & & -2[\alpha x^3 + (3\alpha+\beta)x^2 + 2\beta x]e^x + (\alpha x^3 + \beta x^2)e^x = (6x+2)e^x \\ & \Leftrightarrow & (6\alpha x + 2\beta)e^x = (6x+2)e^x \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 6\alpha = 6 \\ 2\beta = 2 \end{array} \right. \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1. \end{array} \right. \end{array}$$

1.5

Donc

$$y_p(x) = (x^3 + x^2)e^x.$$

3. Détermination de la solution générale de (2) : La solution générale de (2) est

$$\begin{array}{rcl} y_g(x) & = & y_0(x) + y_p(x) \\ & = & (C_1 + C_2 x + x^2 + x^3)e^x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

0.5

4. Cherchons la solution de (2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. On a

$$y'(x) = [C_1 + C_2 + (C_2 + 2)x + 4x^2 + x^3]e^x.$$

Par suite,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 + C_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Finalement, la solution est

$$y(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^x.$$

1

Exercice n° 4. Soit la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculons $A = I_3 - M$ et $B = I_3 + M + M^2$. On a

$$A = I_3 - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0.5

Calculons M^2 : On a

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0.5

Donc

$$B = I_3 + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0.5

2. Calculons $A \times B$ et $B \times A$: On a

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.25

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.25

3. Déduction que B est inversible et donner son inverse : On a

$$A \times B = B \times A = I_3,$$

donc B est inversible et son inverse

0.5

$$B^{-1} = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0.5

4. Résolution du système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} 4x+2y+z=1 \\ -5x-2y-z=2 \\ 2x+y+z=-1, \end{cases}$$

(a) en utilisant la méthode de la matrice inverse : On a

$$(S) \Longleftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1

(b) en utilisant la méthode de Cramer : On a

$$(S) \Longleftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

~~0~~

0.5

On a

$$\det B = 4\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-2+1)-2(-5+2)+(-5+4) = 1.$$

$\det B \neq 0$, donc (S) est un système de Cramer et admet une unique solution donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -3,$$

1.5

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 8,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{4\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -3.$$

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Juin 2019

Examen de Maths II

(Durée 2h)

Les calculatrices programmables ne sont pas autorisées

Exercice 1. (4 points)
On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le déterminant de la matrice A.

b. A est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

Exercice 2. (6 points)

1. Déterminer les constantes réelles A, B et C qui vérifient : $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1}$.
2. Calculer la primitive de la fonction $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.
3. Résoudre l'équation différentielle suivante : $ydx - x(x^2-1)dy = 0$.

Exercice 3. (6 points)
Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = (8x+1)e^{3x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée a (E).
2. Trouver les constantes réelles a et b pour que $y_p = (ax^2 + bx)e^{3x}$ soit une solution particulière de (E).
3. Déduire la solution génerale de (E).
4. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 4. (4 points)

I) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

II) i) Déterminer les constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $x^2 + 6x + 25 = (x+\alpha)^2 + \beta^2$.

ii) A l'aide du changement de variable $x + \alpha = \beta t$, calculer $I = \int \dfrac{x}{x^2+6x+25} dx$.

Bon Courage

2

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Juin 2019

Corrigé de l'examen de MathsII

Exercice 1. (4 points)

I. Considèrons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Calculons le déterminant de la matrice A. Il vient, en développant par rapport à la deuxième ligne.

$$det(A) = 0\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

1,5

b. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a $det(A) = -1 \neq 0$, donc A est inversible. Calculons l'inverse de A, on a $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, {}^t(comA)$.

0,5

$$comA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad donc \qquad {}^t(comA) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1 0,5

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

0,5

Exercice 2. (6 points)

1. Déterminons les constantes réelles A, B et C qui vérifient :
$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$.
On a $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(A+B+C)x^2 + (C-B)x - A}{x(x+1)(x-1)}$
En identifiant, on obtient : $A = -1, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$
donc $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$.

1,5

2. Calculons la primitive de la fonction $\frac{1}{x(x^2-1)}$.
$\int \frac{1}{x(x^2-1)}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{1}{2(x+1)}dx + \int \frac{1}{2(x-1)}dx$

$$= -ln|x| + ln\sqrt{|x+1|} + ln\sqrt{|x-1|} + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$
$$= ln\frac{\sqrt{|x+1|}}{|x|} + ln\sqrt{|x-1|} + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

/2

3. Résoulution de l'équation différentielle suivante : $ydx - x(x^2-1)dy = 0$.
   remarquons $y = 0$ est une solution évidente.
   Soit $y \neq 0$, on a $ydx - x(x^2-1)dy = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{1}{x(x^2-1)}dx....(I)$
   est une équation différentielle à variable séparable.
   En intégrant
   $\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$
   et d'après la question précédente on obtient :
   $ln|y| = ln\frac{\sqrt{|x+1|}}{|x|} + ln\sqrt{|x-1|} + k, \qquad k \in \mathbb{R}$
   $|y| = \frac{\sqrt{|x+1|}}{|x|}\sqrt{|x-1|}e^k, \qquad k \in \mathbb{R}^*$
   $y = \pm e^k \frac{\sqrt{|x+1|}}{|x|}\sqrt{|x-1|}, \qquad k \in \mathbb{R}^*$
   D'où $y = k_1\frac{\sqrt{|x+1||x-1|}}{|x|}, \qquad k_1 = \pm e^k \in \mathbb{R}^*$
   Finalement, la solution génerale de l'équation $ydx - x(x^2-1)dy = 0$ est
   $y = C\frac{\sqrt{|x+1||x-1|}}{|x|}, \qquad C \in \mathbb{R}$

2,5

Exercice 3. (6 points)
Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = (8x+1)e^{3x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée a (E).
   Résolution de l'équation homogène

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad (E_0)$$

   L'équation caractéristique associée à (E_0).

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$ 0,5

   admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de (E) est 0,5

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{3x}$$ 0,5

   où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Trouvons les constantes réelles a, b pour que $y_p = (ax^2+bx)e^{3x}$ soit une solution particulière de (E).
   on a $y_p' = (2ax+b)e^{3x} + 3(ax^2+bx)e^{3x}$, 0,5
   et
   $y_p'' = 2ae^{3x} + 3(2ax+b)e^{3x} + 3(2ax+b)e^{3x} + 9(ax^2+bx)e^{3x}$, 0,5
   En remplaçant y_p' et y_p'' dans (E) on obtient :

$2ae^{3x} + 3(2ax + b)e^{3x} + 3(2ax + b)e^{3x} + 9(ax^2 + bx)e^{3x} - 4(2ax + b)e^{3x} - 12(ax^2 + bx)e^{3x} + 3(ax^2 + bx)e^{3x} = (8x + 1)e^{3x}$

qui donne $\qquad 4ax + 2b + 2a = 8x + 1$

En identifiant, on trouve $a = 2$ et $b = \frac{-3}{2}$. D'où 1

$y_p = (2x^2 - \frac{3}{2}x)e^{3x}$. 0,5

3. Déduire la solution génerale de (E). On a $y_G = y_0 + y_p$ donc

   $y_G = C_1e^x + C_2e^{3x} + (2x^2 - \frac{3}{2}x)e^{3x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

   $y_G = C_1e^x + (2x^2 - \frac{3}{2}x + C_2)e^{3x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. 0,5

4. Trouvons la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

   Commençons par

   $y(0) = 1 \Longrightarrow C_1e^0 + (20^2 - \frac{3}{2}0 + C_2)e^{3\times 0} = 1$

   on obtient $C_1 + C_2 = 1$ .... (1)

   Ensuite dans la dérivée de y_G on aura

   $y'(0) = 0 \Longrightarrow C_1e^0 + (4 \times 0 - \frac{3}{2})e^{3\times 0} + 3(2 \times 0^2 - \frac{3}{2} \times 0 + C_2)e^{3*0} = 0$ 1

   on obtient $C_1 + 3C_2 - \frac{3}{2} = 0$ ....(2)

   de (1) et (2) on trouve

   $C_1 = \frac{3}{4}, \qquad C_2 = \frac{1}{4}$

   Finalement,

$$y_G = \frac{3}{4}e^x + (2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4})e^{3x}.$$ 0,5

Exercice 4. (4 points)

I) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^1 \ln(x + 1)dx$.

On pose

$U'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad U(x) = x$

$V(x) = \ln(x + 1) \quad \Rightarrow \quad V'(x) = \frac{1}{x+1}$

$\int_0^1 \ln(x + 1)dx = x\ln(x + 1)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

$= \ln(x + 1)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx$

$= \ln(x + 1)|_0^1 - \int_0^1 (1 - \frac{1}{x+1})dx$

$= \ln(x + 1)|_0^1 - (x - \ln(x + 1))|_0^1$

$= 2\ln(2) - 1$ 2

II) i) Déterminons les constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $x^2 + 6x + 25 = (x + \alpha)^2 + \beta^2$.

on a $x^2 + 6x + 25 = (x + 3)^2 + 4^2$ 0,5

ii A l'aide du changement de variable $x + \alpha = \beta t$, calculons $I = \int \frac{x}{x^2 + 6x + 25}dx$

En posant $x + 3 = 4t$ et donc $dx = 4dt$

$I = \int \frac{x}{x^2 + 6x + 25}dx = \int \frac{x}{(x + 3)^2 + 4^2}dx$

$= \int \frac{4t - 3}{4^2(t^2 + 1)}4dt$

$$= \int \frac{t}{(t^2+1)}dt - \int \frac{3}{4(t^2+1)}dt$$
$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \frac{3}{4}\arctan t + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Finalement,

$$I = \int \frac{x}{x^2+6x+25}dx = \frac{1}{2}\ln(\frac{x^2+6x+13}{4}) - \frac{3}{4}\arctan(\frac{x+3}{4}) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

1,2

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département première année Technologie

Mai 2013

Examen de MATHS 2
durée 2 heures

$I+J=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1$ (1,5)

$I-J=\frac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)+c_2$ (1,5) (1)

Exercice n° 1. (6 pts)
Posons :

$$I=\int e^{2x}\cos^2 x\,dx \qquad \text{et} \qquad J=\int e^{2x}\sin^2 x\,dx.$$

(1) $I=\frac{e^{2x}}{8}(\cos 2x+\sin 2x+2)+c$

1. Calculer $I+J$.
2. En appliquant la méthode d'intégration par parties deux fois, calculer $I-J$.
3. Déduire I et J.

Indication : $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

(1) $J=\frac{e^{2x}}{8}(2-\cos 2x-\sin 2x)+c$

Exercice n° 2. (6 pts)
1. Considérons l'équation différentielle : $y'+(1-\frac{1}{x})y=x$ (1)

   a. Résoudre l'équation homogène associée à (1). (1,5)

   b. Vérifier que $y_p(x)=x$ est une solution particulière de (1). (0,5)

   c. En déduire la solution générale de (1). (0,5)

   d. Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $\underline{y(1)=1+\frac{1}{e}}$. (0,5)

2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y''+y=x^3+1.$$

$r_1=-i$ (0,5)
$r_2=i$ (0,5)
$y_G=\lambda\cos x+\mu\sin x$
$y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$
$y_p=x^3-6x+1$ (1,5)

Exercice n° 3. (8 pts)
1. Soit la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$y_G=$ (0,5)

a. Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

$\det A=-\frac{1}{2}\neq 0$ (1)

b. Déduire la solution du système linéaire suivant :

$BX=b$, $B=A^{-1}$, $\det B=\frac{1}{\det A}=-2\neq 0$
(1) $X=B^{-1}b=(A^{-1})^{-1}b=Ab=\begin{pmatrix}3/2\\5\\4\end{pmatrix}$

$$(S):\begin{cases}-2x+z=1\\ -6x+2y=1\\ 6x-y-z=0\end{cases}$$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -6 & 2 & 0\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$ (2)

2. Résoudre suivant les valeurs de α le système linéaire suivant :

$\det A_\alpha=\alpha^2(\alpha+1)$ (0,5)

$$(S_\alpha):\begin{cases}\alpha x+\alpha y+\frac{1}{2}\alpha z=1\\ x-\alpha y+\frac{1}{2}z=-1\\ y-\alpha z=4.\end{cases}$$

$x=\frac{1}{2}\frac{(4\alpha-1)}{\alpha^2}$ (0,5)
$y=\frac{1}{\alpha}$ (0,5)
$z=-\frac{4\alpha+1}{\alpha^2}$ (0,5)

Bon Courage.

• Si $\det A_\alpha\neq 0 \iff \alpha\neq 0$ et $\alpha\neq -1$ le (S_α) s Cramer (0,5)
• Si $\det A_\alpha=0 \Rightarrow (S_\alpha)$ ne infinité ou n'admet aucune solution
$\underline{\alpha=0}$ $0=2$ ni (0,5) n'admet pas.
$\underline{\alpha=-1}$ $y=4-$ $(1/2\,z-5,\ 4-z,\ z)$ soit infinité de solution (1)

Université A. Mira de Béjaia

Faculté de Technologie

Département 1ère année Technologie

Mai 2013

Corrigé de l'examen de Maths 2

Exo1:

1) $I+J = \int e^{2x}(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx = \int e^{2x}\,dx$

1,5 pt

$$\boxed{I+J = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1} \quad \dots \quad (1)$$

2) $I-J = \int e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int e^{2x}\cos 2x\,dx$

1,5 pt

Posons $u = e^{2x} \Rightarrow u' = 2e^{2x}$

$v' = \cos 2x \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$I-J = u.v - \int u'v\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}.\sin 2x - \underbrace{\int e^{2x}.\sin 2x\,dx}_{L} \quad (*)$$

Posons $f = e^{2x} \Rightarrow f' = 2e^{2x}$, $g' = \sin 2x \Rightarrow g = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$L = \int e^{2x}.\sin 2x\,dx = fg - \int f'g\,dx$$

$$= e^{2x}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right] + \int e^{2x}\cos 2x\,dx$$

$$L = -\frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x + (I-J)$$ en remplace dans (*)

$$I-J = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 2x + \frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x - (I-J)$$ 1 pt

$$\Leftrightarrow \boxed{I - J = \frac{1}{4} e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x) + C_2} \quad (2)$$

3. $$(1)+(2) \Leftrightarrow 2I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1\right] e^{2x} + C_1 + C_2.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I = \frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x + 2) e^{2x} + C}$$ 1 pt

$$(1) - (2) \Leftrightarrow \boxed{J = \frac{1}{8}\left(2 - \cos 2x - \sin 2x\right) e^{2x} + C'}$$ 1 pt

avec $C = \frac{C_1 + C_2}{2}$ et $C' = \frac{C_1 - C_2}{2}$.

Exo2:

a. $$y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = 0 \Leftrightarrow y' = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| - x + c$$

$$\Leftrightarrow |y| = \frac{|x|}{e^x} \cdot e^c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_H = k.\frac{x}{e^x} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}}$$ 1,5pt

b. En remplace x dans (1) :

$$1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) x = x \;.\; (\text{ok})$$ 0,5 pt

c. $$\boxed{y_G = y_H + y_p(x) = k\frac{x}{e^x} + x}$$ 0,5 pt

d. $y_G(1) = \frac{k}{e} + 1 = 1 + \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{k = 1}$ 0,5 pt

$$\boxed{y_p = \frac{x}{e^x} + x}$$

2. $$y'' + y = x^3 + 1 \ldots (E)$$

* Considérons l'équation homogène associée à (E) :

$$y'' + y = 0 \ldots (H)$$

L'équation caractéristique :

$$r^2 + 1 = 0 \ldots (EC)$$

admet 2 racines complexes : $r_1 = -i$ et $r_2 = i$ 0,5 pt

d'où $\boxed{y_G(H) = \lambda \cos x + \mu \sin x, \; \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{C}}$ 0,5pt

* Le second membre et un polynôme de degré 3. et comme le coefficient de y dans (E) et non nul, donc la solution particulière $y_p(E)$ est de la forme :

$$\left.\begin{aligned} y_p(E) &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + \Delta \\ y_p'(E) &= 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y_p''(E) &= 6Ax + 2B \end{aligned}\right\}$$ en remplace dans (E)

$$6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^3 + 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad Ax^3 + Bx^2 + (6A+C)x + 2B + D = x^3 + 1$$

Par identification : $\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ \Delta = 1 \\ C = -6 \end{cases}$

1,5 pt

d'où $\boxed{y_p(E) = x^3 - 6x + 1}$

0,5 pt

La solution générale de (E) :

$$\boxed{y_G(E) = \lambda \cos x + \mu \sin x + x^3 - 6x + 1 \,,\ \mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exo3 :

1.

a. A est inversible si et ssi $\det A \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\ell_3-\ell_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1 pt

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$ donc A est inversible.

* Calcul de A^{-1} :

- la comatrice C :

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

2 pt

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^{t}C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(5/8)

b. le système (S) s'écrit :

$$(S) : BX = b \quad \text{avec} \quad B = A^{-1} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det B = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{-1/2} = -2 \neq 0$ donc (S) admet

une seule solution :

$$X = B^{-1} . b = (A^{-1})^{-1} . b$$
$$= A . b$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1pt

2. Posons :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \frac{1}{2}\alpha \\ 1 & -\alpha & 1/2 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$|A_\alpha| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & +1/2\,\alpha \\ 1 & -\alpha & 1/2 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} -\alpha & \frac{1}{2} \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & 1/2\,\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\left[\alpha^2 - 1/2\right] - \left[-\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\right] = \alpha^3 - \cancel{1/2\,\alpha} + \alpha^2 + \cancel{1/2\,\alpha}$$ 0,5pt

$$= \alpha^2(\alpha+1)$$

- Si $\det A_\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$ (S_α) admet une seule solution. 0,5 pt

- Si $\det A_\alpha = 0 \Rightarrow (S_\alpha)$ admet une infinité de solution ou il n'admet aucune solution.

(6/9)

* Si $\det A_\alpha \neq 0$ la solution est:

$$x = \frac{\Delta x}{|A_\alpha|}, \quad y = \frac{\Delta y}{|A_\alpha|}, \quad z = \frac{\Delta z}{|A_\alpha|}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \frac{1}{2}\alpha \\ -1 & -\alpha & 1/2 \\ 4 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\alpha+1) \\ -1 & -\alpha & 1/2 \\ 4 & 1 & -\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha+1)\begin{vmatrix} -1 & -\alpha \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha+1)(4\alpha-1)$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\,\frac{(4\alpha-1)}{\alpha^2}}$$

0,5 pt

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \frac{1}{2}\alpha \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+\alpha & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -\alpha \end{vmatrix} l_1 - \alpha l_2$$

$$\Delta y = -(\alpha+1)\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha+1)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\alpha}}$$

0,5 pt

$$\Delta z = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} l_1 + l_2$$

$$D_z = (\alpha+1)\begin{vmatrix} -\alpha & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (\alpha+1)(-4\alpha+1)$$

$$\boxed{z = \frac{-4\alpha+1}{\alpha^2}}$$

0,5 pt

* Si dét $A_\alpha = 0$:

1ère situation : $(\alpha=0)$:

$$(S_0) : \begin{cases} 0 = 2 & \text{impossible} \\ x + \frac{1}{2}z = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

0,5 pt

donc (S_0) n'admet pas de solution.

2ème situation $(\alpha=-1)$

$$(S_{-1}) : \begin{cases} -x-y+\frac{1}{2}z = 1 & \ldots (1) \\ x+y+\frac{1}{2}z = -1 & \ldots (2) \\ y + z = 4 & \ldots (3) \end{cases}$$

1 pt

de (3) : $\boxed{y = 4 - z}$ ... (4)

En remplaçant (4) dans (2) : $x = -1 - \frac{1}{2}z - 4 + z$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}z - 5} \ldots (5)$$

Si (4) et (5) vérifient (1) alors (S_{-1}) admet une infinité de solutions, sinon (S_{-1}) n'a aucune solution.

(4) et (5) dans (1) : $-\frac{1}{2}\cancel{z} + 5 - 4 + \cancel{z} - \frac{1}{2}\cancel{z} = 1$

donc (S_{-1}) admet une infinité de solutions E, avec

$$\boxed{E = \left\{ \left(\tfrac{1}{2}z - 5, 4 - z, z\right), z \in \mathbb{R} \right\}}$$

(8/8)

/

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Juin 2021

Examen de Maths II
Durée 1h30

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1. (7 points)
Considérons la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha - 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

1. Calculer le déterminant de la matrice B.
2. Pour quelles valeurs de α la matrice B est-elle inversible ?
3. Si $\alpha = 1$, calculer l'inverse de B.

Exercice 2. (8 points)
I) Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

1. Déterminer les constantes réelles A, B et C qui verifient :
$$\frac{x^2}{x+1} = Ax + B + \frac{C}{x+1}.$$
2. Calculer la primitive suivante :
$$\int \frac{x^2}{x+1} dx.$$
3. Résoudre l'équation différentielle suivante :
$$(x+1)y' + x^2 y = 0.$$

II) Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :
$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}.$$

Exercice 3. (5 points)

1. Calculer la primitive suivante :
$$\int x^2 \sqrt{3-x}\, dx.$$
2. En utilisant l'intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = -2 + 6\ln 3.$$

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Juin 2021

Corrigé de l'examen de Maths II

Exercice 1. (7 points)

I. Considérons la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha - 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

a. Calculons le déterminant de la matrice B.

$$det(B) = \alpha \begin{vmatrix} \alpha\text{-}1 & \text{-}1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & \text{-}1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & \alpha\text{-}1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 3\alpha.$$ 2,5

b. Les valeurs de α pour que la matrice B soit inversible.

La matrice B est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0 0,5

On a

$$\left.\begin{aligned} B \text{ est inversible} &\iff det(B) \neq 0. \\ &\iff \alpha^2 - 3\alpha \neq 0. \\ &\iff \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 3\}. \end{aligned}\right\}$$ 1,5

c. Si $\alpha = 1$, calculons l'inverse de B.

On a pour $\alpha = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $det(B) = -2$.

Alors

$$ComB = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad donc \quad {}^t(comB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1,5 0,5

d'où

$$\left. B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$ 0,5

Exercice 2. (8 points)

I) Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

1. Déterminons les constantes réelles A, B et C qui vérifient :

$$\frac{x^2}{x+1} = Ax + B + \frac{C}{x+1}.$$

On a $Ax + B + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax^2 + (A+B)x + B + C}{x+1}$.
En identifiant, on obtient : $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$,
donc $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

1,5

2. Calculons la primitive suivante : $\int \frac{x^2}{x+1}dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x+1}dx &= \int (x - 1 + \frac{1}{x+1})dx \\ &= \int (x-1)dx + \int \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + ln|x+1| + K, \qquad K \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

1,5

3. Résolution de l'équation différentielle suivante :

$$(x+1)y' + x^2y = 0.$$

Remarquons que $y = 0$ est une solution évidente.
Soit $y \neq 0$, on a $(x+1)y' + x^2y = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{-x^2}{x+1}dx$
qui est une équation différentielle à variables séparables.
En intégrant
$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{-x^2}{x+1}dx$ 0,5
et d'après la question précédente, on obtient :
$ln|y| = -(\frac{1}{2}x^2 - x + ln|x+1|) + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$
Par suite,
$|y| = e^{-(\frac{1}{2}x^2 - x + ln|x+1|) + k}, \qquad k \in \mathbb{R}$
et donc
$y = \pm e^k e^{-(\frac{1}{2}x^2 - x)}(x+1)^{-1}, \qquad k \in \mathbb{R}.$
D'où, $y = k_1 \frac{e^{-(\frac{1}{2}x^2 - x)}}{x+1}, \qquad k_1 = \pm e^k \in \mathbb{R}^*.$

0,5

Finalement, la solution génerale de l'équation $(x+1)y' + x^2y = 0$ est

$$y = C\frac{e^{-(\frac{1}{2}x^2 - x)}}{x+1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

0,5

II) Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x} \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

Résolution de l'équation homogène

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \ \ldots(1)$$

1 1

L'équation caractéristique

$$r^2 + 2r - 3 = 0,$$ 0,5

admet deux racines réelles simples $r_1 = -3$ et $r_2 = 1$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y_0 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$ 1

$m = -3$ est une racine simple de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière de (E) sous la forme :
$y_p(x) = P_0(x) x e^{-3x}$ avec $P_0(x) = A$.
c-à-d : $y_p(x) = Axe^{-3x}$, $\quad A \in \mathbb{R}$. 0,5
On a

$$y_p'(x) = (A - 3Ax)e^{-3x} \quad et \quad y_p''(x) = (-6A + 9Ax)e^{-3x}.$$

En substituant dans l'équation (E) les expressions de y_p' et de y_p'', on obtient $-4Ae^{-3x} = e^{-3x}$.
Par identification, on trouve $A = \frac{-1}{4}$.
D'où, une solution particulière y_p de (E) est

$$y_p(x) = \frac{-1}{4} x e^{-3x}.$$ 1

Finalement,

$$y_G(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + \frac{-1}{4} x e^{-3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$ 0,5

est la solution générale de l'équation (E).

Exercice 3. (5 points)

a) Calculons la primitive suivante :

$$\int x^2 \sqrt{3 - x} \; dx.$$ 0,5

On pose $t = 3 - x$, donc $dt = -dx$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{3-x}\; dx &= \int -(3-t)^2 \sqrt{t}\; dt.\\
&= \int -(9 - 6t + t^2) t^{\frac{1}{2}}\; dt\\
&= \int -(9t^{\frac{1}{2}} - 6t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{2}})dt\\
&= -9\tfrac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + 6\tfrac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + c, \;\; c \in \mathbb{R}\\
&= -6t^{\frac{3}{2}} + \tfrac{12}{5} t^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + c, \;\; c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$ 2

Finalement,

$$\int x^2 \sqrt{3-x}\; dx = -6(3-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(3-x)^{\frac{7}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) En utilisant l'intégration par parties, montrons que :

$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = -2 + 6\ln 3.$$

On pose

$$g(x) = \ln(x+1) \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

$$f'(x) = 2x+1 \Longrightarrow f(x) = x^2 + x.$$

1

Donc

$$\begin{aligned}\int (2x+1)\ln(x+1)dx &= (x^2+x)\ln(x+1) - \int (x^2+x)\frac{1}{(x+1)}dx \\ &= (x^2+x)\ln(x+1) - \int x dx \\ &= (x^2+x)\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

1

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx &= (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2 + C \,\Big|_0^2 \\ &= (4+2)\ln(2+1) - 2 \\ &= -2 + 6\ln 3.\end{aligned}$$

0,5

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2014-2015
Juin 2015

Examen de MATHS 2. Durée : 2 heures

Exercice n° 1. *(5pts.)* Considérons l'équation différentielle

$$2y' - y = \cos x. \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (1). $y = K_1 e^{\frac{1}{2}x}$ (2)
2. Vérifier que $y_p(x) = \frac{-1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x$ est une solution particulière de (1). (1)
3. En déduire la solution générale de (1). (1)
4. Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $y(0) = 0$. (1) $K = \frac{1}{5}$

Exercice n° 2. *(4pts.)* Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = (2x - 4)e^x. \tag{2}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène correspondante. $(A+Bx)e^{2x}$ (2)
2. Déterminer les constantes α et β pour que $y_1(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ soit une solution particulière de (2). $(2x+0)e^x$ (1)
3. Déterminer la solution générale de (2). (1)

Exercice n° 3. *(5pts.)* Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx, n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0 et I_1. $\frac{\pi}{2}$ 1 (0,5) (0,5)
2. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$; (Indication : Ecrire $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} . \sin x dx$ et utiliser une intégration par parties). (3)
3. En déduire I_2 et I_3. (0,5) (0,5) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2}{3}$.

Exercice n° 4. *(6pts.)*

1. Déterminer les constantes réelles a et b telles que :

$$\frac{9}{x^2 - 5x - 14} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-7}$$

$a = -1$, $b = 1$ (0,5)

2. Calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{9}{x^2-5x-14} dx$. D éduire la valeur de l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{9}{x^2-5x-14} dx$. (0,5) $\ln\frac{4}{7}$ (1,5)
3. En utilisant un changement de variable convenable, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9\cos t}{-14 - 5\sin t + \sin^2 t} dt.$$

(1) $x = \sin t$. $\to \ln\left(\frac{4}{7}\right)$

4. Soit $x \in]7, +\infty[$, résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' - \frac{9}{x^2 - 5x - 14} y = \frac{x-7}{x^2 - 5x - 14}.$$

$y = K.\frac{x-7}{x+2}$ (1,5) (1)

$K = \ln(x-7)$

Bon courage

Béjaia le 09 Juin 2015

Corrigé de l'EMD de Maths 2

Exercice n° 1 : 05pts : Considérons l'équation differentielle

$$2y' - y = \cos x \quad \text{-1-}$$

1) l'équation homogène associée a -1- est $2y' - y = 0$ --- -2-

Pour $y = 0$ est une solution triviale de -2-

si $y \neq 0$, on a -2- $\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int dx$ 2

$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x + c \Rightarrow \boxed{y = K_1 e^{\frac{1}{2}x}}$ avec $K_1 = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow \boxed{y_0 = Ke^{\frac{1}{2}x},\ K \in \mathbb{R}}$

2) soit $y_p = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x$

vérifions que y_p est une solution particulière de -1-

on a $y_p' = \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x$, donc 1

$2y_p' - y_p = 2\left(\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x\right) - \left(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right) = \cos x$

$\Rightarrow \cos x = \cos x$, alors y_p est bien une solution particulière de -1-.

3) La solution générale y_G de -1- est $y_G = y_0 + y_p$

$= Ke^{+\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right),\ K \in \mathbb{R}$. 1

4) $y_G(0) = 0 \Rightarrow Ke^{\frac{1}{2}0} + \left(-\frac{1}{5}\cos 0 + \frac{2}{5}\sin 0\right) = 0 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{5}}$

Finalement, la solution de -1- vérifiant $y(0) = 0$

est $\boxed{y = \frac{1}{5}e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right)}$

1

Exercice n°02 : 04pts : Soit l'équation différentielle du second ordre suivante : $y''-4y'+4y=(2x-4)e^{x}$ ... -2-

1) l'équation homogène associée à -2- est

$$y''-4y'+4y=0 \quad \dots (E0)$$

L'équation caractéristique de (E0) est $r^2-4r+4=0$

$\Rightarrow (r-2)^2=0 \Rightarrow r=r_1=r_2=2$, par suite 2

$$y_0=(A+Bx)e^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2) Soit $y_1=(\alpha x+B)e^{x}$ une solution particulière de -2-, alors $y_1''-4y_1'+4y_1=(2x-4)e^{x}$

$\Rightarrow (2\alpha+B+\alpha x)e^{x}+(-4\alpha-4B-4\alpha x)e^{x}+(4\alpha x+4B)e^{x}$

$=(2x-4)e^{x} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha+B=-4 \\ \alpha=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ B=0 \end{cases}$ 1

Donc $\boxed{y_1=2xe^{x}}$

3. La solution générale de -2- est

$$\boxed{y_G=y_0+y_1=(A+Bx)e^{2x}+2xe^{x}, \ A, B \in \mathbb{R}}$$

1

Exercice 3 05pts :

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx$, $n \in \mathbb{N}$

0,5

1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^0 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^1 \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$ 0,5

2) Montrons que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

On a $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} \cdot \sin x \, dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = (\sin x)^{n+1} \\ v'(x) = (\sin x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)\cos x (\sin x)^n \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$

3

$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x) \, dx$

$= \left[-(\sin x)^{n+1} \cdot \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x \, dx$

$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(n+2)} x \, dx$

$(n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$, Donc $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$.

Conclusion $\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$

3) $I_2 = I_{0+2} = \frac{0+1}{0+2} I_0 = \frac{1}{2} I_0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ 0,5

$I_3 = I_{1+2} = \frac{1+1}{1+2} I_1 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \boxed{\frac{2}{3}}$

0,5

Exercice 4 (06pts) :

0,5

1) On a $\boxed{\dfrac{9}{x^2-5x-14} = -\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-7}}$, $a = -1$ et $b = 1$.

2) On a $\displaystyle\int \frac{9}{x^2-5x-14}\,dx = \int \frac{-1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-7}\,dx = -\ln|x+2| + \ln|x-7| + c$

1,5

$= \ln\left|\dfrac{x-7}{x+2}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{9}{x^2-5x-14}\,dx = \left[\ln\left|\frac{x-7}{x+2}\right|\right]_0^1 = \boxed{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}$ 0,5

3) Posons $x = \sin t$, donc $dx = \cos t\,dt$, et on aura :

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{9\cos t}{-14-5\sin t+\sin^2 t}\,dt = \int_0^1 \frac{9\,dx}{-14-5x+x^2} = \boxed{\ln\left[\frac{4}{7}\right]}$ 1

4) Soit $x \in]7, +\infty[$ et considérons l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{9}{x^2-5x-14}\,y = \frac{x-7}{x^2-5x-14} \quad \text{.....} \quad -1-$$

qui est une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

Soit l'équation sans second membre.

$$y' - \frac{9}{x^2-5x-14}\,y = 0 \quad \text{-----} \quad -2-$$

$-2- \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9}{x^2-5x-14}\,y \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{9\,dx}{x^2-5x-14} \quad y \neq 0$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left[\dfrac{x-7}{x+2}\right] + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow y = K \cdot \dfrac{x-7}{x+2}, \quad K \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ est une solution triviale).

1,5

Variation de la constante k.

On a $y' = k' \frac{x-7}{x+2} + k\left(\frac{x+2-x+7}{(x+2)2}\right)$

$= k' \frac{x-7}{x+2} + k \frac{9}{(x+2)^2}$

on remplace y' et y dans -1- et on trouve

$$k' \frac{x-7}{x+2} + 9\frac{k}{(x+2)^2} - \frac{9}{x^2-5x-14} k \frac{x-7}{x+2} = \frac{x-7}{x^2-5x-14}$$

donc $k' \frac{x-7}{x+2} = \frac{x-7}{x^2-5x-14} \Rightarrow k' = \frac{1}{x-7}$

par conséquent $k = \ln[x-7] + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Finalement. $y = \left(\ln[x-7] + c\right)\frac{x-7}{x+2},\ c \in \mathbb{R}$.

1