

Examen de Remplacement de MATHS 2. Durée : 2 heures

Exercice n° 1. (7pts.)

1. Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' - 2y = 4 - x. \quad (1)$$

- Résoudre l'équation homogène associée à (1).
- Vérifier que $y_p(x) = \frac{-7}{4} + \frac{1}{2}x$ est une solution particulière de (1).
- En déduire la solution générale de (1).
- Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $y(0) = 1$.

2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - y' - 2y = 3x^2 - 2x + 1.$$

Exercice n° 2. (5pts.) Soit

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx, n \in \mathbb{N}.$$

- Calculer I_0 et I_1 .
- Montrer que $\forall n \geq 1, I_n = e - nI_{n-1}$; (Indication : Utiliser l'intégration par parties).

Exercice n° 3. (8pts.)

1. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \\ -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.
- Déduire la solution du système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} -x - y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 1. \end{cases}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre suivant les valeurs de α le système suivant :

$$(S_\alpha) \begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha y - z = 1 \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

Bon courage

Corrigé de l'examen de remplacement de MATHS 2

Exercice n° 1. (7pts.)

1. Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' - 2y = 4 - x. \quad (1)$$

(a) Résolution de l'équation homogène associée à (1) : L'équation homogène associée est

$$y' - 2y = 0 \dots\dots (E_0)$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = 2 &\implies \frac{dy}{y} = 2dx \\ &\implies \ln |y| = 2x + K_1, K_1 \in \mathbb{R} \\ &\implies y = C_1 e^{2x}, C_1 \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$



$y = 0$ est une solution évidente de (E_0) . Finalement, la solution générale de (E_0) est

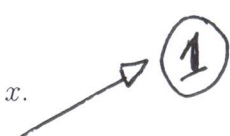
$$y(x) = ce^{2x}, c \in \mathbb{R}.$$

(b) Vérification que $y_p(x) = \frac{-7}{4} + \frac{1}{2}x$ est une solution particulière de (1) : On a

$$y'_p(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc

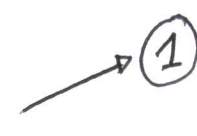
$$\begin{aligned} y'_p - 2y_p &= \frac{1}{2} - 2\left(\frac{-7}{4} + \frac{1}{2}x\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{7}{4} - x = 4 - x. \end{aligned}$$



Donc $y_p(x) = \frac{-7}{4} + \frac{1}{2}x$, une solution particulière de (1).

(c) Dédution de la solution générale de (1) :

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_0(x) + y_p(x) \\ &= ce^{2x} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}x, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

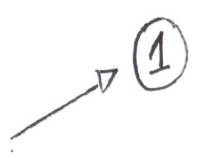


(d) Trouvons la solution de l'équation (1) vérifiant $y(0) = 1$: On a

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\implies ce^{2 \cdot 0} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}(0) = 1 \\ &\implies c - \frac{7}{4} = 1 \\ &\implies c = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Donc la solution voulue est

$$y_1(x) = \frac{11}{4}e^{2x} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}x.$$



2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - y' - 2y = 3x^2 - 2x + 1. \quad (2)$$

- (a) Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (2) : L'équation homogène associée à (2) est

$$y'' - y' - 2y = 0 \dots\dots\dots(E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 - r - 2 = 0 \dots\dots\dots(C)$$

(C) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. Donc la solution générale de (E_0) est

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

1

- (b) Détermination d'une solution particulière y_1 de (2) : 0 n'est pas une racine de (C) , donc y_1 est de la forme

$$y_1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_1'(x) = 2\alpha x + \beta \text{ et } y_1''(x) = 2\alpha.$$

Donc on aura

$$\begin{aligned} y_1'' - y_1' - 2y_1 = 3x^2 - 2x + 1 &\Leftrightarrow 2\alpha - (2\alpha x + \beta) - 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 3x^2 - 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow -2\alpha x^2 - 2(\alpha + \beta)x + 2\alpha - \beta - 2\gamma = 3x^2 - 2x + 1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha = 3 \\ -2\alpha - 2\beta = -2 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2} \\ \beta = \frac{5}{2} \\ \gamma = \frac{-13}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

1,5

Donc

$$y_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{13}{4}.$$

- (c) Détermination de la solution générale de (1) : La solution générale de (1) est

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_0(x) + y_1(x) \\ &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{13}{4}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

0,5

Exercice n° 2. Soit

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx, n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculons I_0 et I_1 : On a

$$I_0 = \int_1^e (\ln x)^0 dx = \int_1^e dx = x|_1^e = e - 1.$$

1,5

$$I_1 = \int_1^e 1 \cdot \ln x dx.$$

Posons

$$\begin{aligned} f(x) = \ln x &\implies f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 &\implies g(x) = x. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_1 &= x \ln x|_1^e - \int_1^e 1 dx \\ &= e \ln e - \ln 1 - (e - 1) = 1. \end{aligned}$$

1,5

2. Montrer que $\forall n \geq 1, I_n = e - nI_{n-1}$: Posons

$$\begin{aligned} f(x) &= (\ln x)^n \implies f'(x) = \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1} \\ g'(x) &= 1 \implies g(x) = x. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_n &= x(\ln x)^n \Big|_1^e - n \int_1^e (\ln x)^{n-1} \\ &= e - nI_{n-1}. \end{aligned}$$

0,2

Exercice n° 3.

1. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \\ -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Démontrons que A est inversible et calculons son inverse : Développement suivant la deuxième colonne

$$\det A = -(-1) \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -1. \quad \det A \neq 0, \text{ donc } A \text{ est inversible.}$$

On a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{com}A),$$

avec

$$\text{com}A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

où

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

A_{ij} désigne la matrice d'ordre 2 déduite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Après calculs, on trouve

$$\text{Com}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^t(\text{com}A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Dédution de la solution du système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} -x - y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 1. \end{cases}$$

On a

$$(S) \iff A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut utiliser aussi la méthode de Cramer.

1,5

1,5

1,5

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résolution suivant les valeurs de α du système suivant :

$$(S_\alpha) \begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha y - z = 1 \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

On a

$$(S_\alpha) \iff A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_\alpha = 1 \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 - \alpha)(1 + \alpha)$. 0,5

i) Si $\alpha \neq -1$ et $\alpha \neq 1$ (i.e., $\det A_\alpha \neq 0$) alors (S_α) est un système de Cramer et admet une unique solution donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = 0, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$
1,5

ii) Si $\alpha = 1$: On a

$$(S_1) \iff A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_1 = 0$, donc le système (S_1) n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de A_1 on trouve

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det M_1 = -2.$$

M_1 est associée au système

$$(1) \begin{cases} x + z = 1 - y, \\ x - z = 1 - y. \end{cases}$$
1

Les deux inconnues x, z sont les inconnues principales et y est un paramètre. (1) admet une solution (paramétrique) unique donnée par : $x = 1 - y$ et $z = 0$.

On porte cette solution (x, z) dans la troisième équation du système (S_1)

$$x + y - z = (1 - y) + y - 0 = 1.$$

Finalement, (S_1) admet une infinité de solutions

$$\{(1 - y, y, 0), y \in \mathbb{R}\}.$$

ii) Si $\alpha = -1$: On a

$$(S_{-1}) \iff A_{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_{-1} = 0$, donc le système (S_{-1}) n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de A_{-1} on trouve

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \det M_2 = -2.$$

M_2 est associée au système

$$(2) \begin{cases} x + y = -1 + z, \\ x - y = 1 + z. \end{cases}$$

Les deux inconnues x, y sont les inconnues principales et z est un paramètre. (2) admet une solution (paramétrique) unique donnée par : $x = z$ et $y = -1$.

On porte cette solution (x, y) dans la troisième équation du système (S_{-1})

$$x + y - z = z - 1 - z = -1 \neq 1.$$

0,5

Finalement, le système (S_{-1}) n'admet pas de solutions.

Remarque : On peut remarquer que la première équation et la troisième équation du système (S_{-1}) sont incompatibles, donc (S_{-1}) n'admet pas de solutions.

Corrigé de l'examen de MathsII

Exercice 1. (5 points)

Calculons les deux intégrales suivantes :

1. $\int \frac{\ln x}{x(1 - \ln^2 x)} dx.$

On pose : $t = \ln x$, donc $dt = \frac{1}{x} dx$

Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x(1 - \ln^2 x)} dx &= \int \frac{t}{(1 - t^2)} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2t}{(1 - t^2)} dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln|1 - t^2| + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|1 - (\ln x)^2| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. $\int (2x + 1)e^{-x} dx$, intégration par parties

$$g(x) = 2x + 1 \implies g'(x) = 2.$$

$$f'(x) = e^{-x} \implies f(x) = -e^{-x}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int (2x + 1)e^{-x} dx &= -(2x + 1)e^{-x} - \int -2e^{-x} dx \\ &= -(2x + 1)e^{-x} + \int 2e^{-x} dx \\ &= -(2x + 1)e^{-x} - 2e^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int (2x + 1)e^{-x} dx = -(2x + 3)e^{-x} + C$$

où $C \in \mathbb{R}$

Exercice 2. (7 points)

1. Déterminons les constantes réelles a et b qui vérifient : $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}.$

$$\text{On a } \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a + (b-a)x}{x(1-x)}$$

En identifiant, on obtient : $a = 1$ et $b = 1.$

$$\text{donc } \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

2. Trouver les primitives des fonctions $\frac{a}{x}$ et $\frac{b}{1-x}$;

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

et

$$\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x| + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

On déduit la primitive de la fonction $\frac{1}{x(1-x)}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1-x)} dx &= \ln|x| + c_1 - \ln|1-x| + c_2 \\ &= \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| + C, \quad C = c_1 + c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. **Résolution de l'équation différentielle suivante :** $y' - y = \frac{e^x}{x(x-1)}$ (E).
Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0$ (EH)

Pour $y \neq 0$

$$y' - y = 0 \implies \frac{dy}{y} = dx$$

et par suite

$$\ln|y| = x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

D'où

$$y(x) = Ce^x, \quad C = \mp \exp(C_1) \in \mathbb{R}^*$$

$y = 0$ est une solution évidente de (EH) : Finalement, la solution générale de (EH) est

$$y(x) = ke^x; \quad k \in \mathbb{R}$$

.

Résolution de l'équation avec second membre ($y' - y = \frac{e^x}{x(x-1)}$)

Méthode de la variation de la constante :

Soit $y(x) = Ke^x$ la solution générale de l'équation homogène. On fait varier la constante K , et la solution générale de l'équation avec le second membre (E) sera :

$$y(x) = K(x)e^x.$$

On a $y'(x) = K'(x)e^x + K(x)e^x$. En remplaçant y et y' dans l'équation (I), on obtient

$$K'(x) = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(1-x)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

par conséquent

$$K(x) = -\ln|x| + \ln|x-1| + C', \quad C' \in \mathbb{R}$$

$$K(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C', \quad C' \in \mathbb{R}$$

Finalement la solution générale de l'équation (E) est

$$y(x) = \left(\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C'\right)e^x, \quad C' \in \mathbb{R}$$

.

4. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 2y' + y = e^x \dots (E)$$

Résolution de l'équation homogène

$$y'' + 2y' + y = 0$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \dots (1)$$

admet une racine réelle double $r = -1$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y_0 = (C_1 + C_2x)e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$m = 1$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1), donc on cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y_p(x) = P_0(x)e^x \text{ avec } P_0(x) = A.$$

$$\text{c-à-d : } y_p(x) = Ae^x, \quad A \in \mathbb{R}$$

$$y'_p(x) = Ae^x \quad \text{et} \quad y''_p(x) = Ae^x$$

En substituant dans l'équation (E) les expressions de y'_p et de y''_p ; on obtient

$$(E) \implies Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = e^x$$

$$\implies 4Ae^x = e^x$$

Par identification, on trouve $A = \frac{1}{4}$

D'où, une solution particulière y_p de (E) est

$$y_p(x) = \frac{1}{4}e^x$$

Finalement,

$$y_G(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation (E).

Exercice 3. (9 points)

I. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculons le déterminant de la matrice A . Il vient, en développant par rapport à la troisième ligne.

$$\det(A) = -2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

- b. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a $\det(A) = -1 \neq 0$. Calculons l'inverse de A , on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{com}(A))$.

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad {}^t(\text{com}(A)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- c. Déduire la solution du système suivant :

$$\begin{aligned} A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Corrigé de l'examen de Rattrapage MathsII

Partie 1. (12 points)

I On considère l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1. Calculons I_0 .

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{x^0}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \ln |1+x| \Big|_0^1 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

1

2. Montrons que $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

2

3. En déduire les valeurs de I_1 et de I_2

$$\begin{aligned} I_1 + I_0 &= \frac{1}{0+1} \implies I_1 = \frac{1}{0+1} - \ln 2 \\ &\implies I_1 = 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

0,5

$$\begin{aligned} I_2 + I_1 &= \frac{1}{1+1} \implies I_2 = \frac{1}{1+1} - (1 - \ln 2) \\ &\implies I_2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

0,18

II 1. Déterminons les constantes réelles a, b et c qui vérifient : $\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{(x+1)}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{(x+1)} &= \frac{(a+c)x^2 + (a+b)x + b}{x^2(x+1)} \\ \text{En identifiant, on obtient : } &a = 1, b = 1, c = -1 \\ \text{donc } \frac{1}{(x-1)(x-2)^2} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)}. \end{aligned}$$

1,5

a. Trouvons la primitive $F(x) = \int \frac{1}{x^2} \ln(x^2 + x) dx$;
 Intégration par partie :

$$f(x) = \ln(x^2 + x) \implies f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \implies g(x) = -\frac{1}{x}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{-1}{x} \ln(x^2 + x) + \int \frac{1}{x} \frac{2x+1}{x^2+x} dx \\
 &= \frac{-1}{x} \ln(x^2 + x) + \int \frac{2x+1}{x(x^2+x)} dx \\
 &= \frac{-1}{x} \ln(x^2 + x) + \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
 &= \frac{-1}{x} \ln(x^2 + x) + \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| + C \quad / C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

b. Résolution de l'équation différentielle suivante : $y' - \frac{2}{x}y = \ln(x^2 + x) \dots (E)$.

L'équation homogène associée est $y' - \frac{2}{x}y = 0 \dots (E_0)$

est une équation différentielle non homogène (ou avec second membre).

Résolution de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$

$$\begin{aligned}
 y' - \frac{2}{x}y = 0 &\implies y' = \frac{2}{x}y \\
 &\implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} dx \\
 &\implies \ln|y| = \ln|x^2| + c \quad / c \in \mathbb{R}. \\
 &\implies y = \pm e^c x^2 \\
 &\implies y = Kx^2 \quad / K = \pm e^c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Résolution de l'équation avec second membre $y' - \frac{2}{x}y = \ln(x^2 + x)$

Méthode de la variation de la constante : Soit $y(x) = Kx^2$ la solution générale

de l'équation homogène. On fait varier la constante K, et la solution générale

de l'équation avec le second membre (E) sera : $y(x) = K(x)x^2$. On a

$y'(x) = K'(x)x^2 + 2K(x)x$. En remplaçant y et y' dans l'équation (E), on

obtient

$$K'(x) = \frac{1}{x^2} \ln(x^2 + x)$$

par conséquent $K(x) = \int \frac{1}{x^2} \ln(x^2 + x)$

$$K(x) = \frac{-1}{x} \ln(x^2 + x) + \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| + C \quad / C \in \mathbb{R}.$$

Finalement la solution générale de l'équation (E) est

$$y_G(x) = \frac{-1}{x} \ln(x^2 + x) + \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| + C + Kx^2.$$

$$y_G(x) = -x \ln(x^2 + x) + x^2 \ln|x| - x - x^2 \ln|x+1| + K_1 \quad / K_1 = C + K \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Résolution de l'équation homogène

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'équation caractéristique

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \dots (1)$$

admet la racine réelle double $r_1 = 1$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$m = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique, donc $y_1 = x^2 P_0(x) e^x$ avec $P_0(x) = a$. En identifiant, on trouve $a = \frac{1}{2}$.

D'où

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2 e^x$$

→ 0,75

Finalement,

$$y_G = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$$

$$y_G = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^x$$

→ 0,5

Partie 2. (08 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la matrice suivante :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $(A_\alpha - \alpha I_3)^2 = 3(A_\alpha - \alpha I_3)$.

$$(A_\alpha - \alpha I_3)^2 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \right)^2 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } (A_\alpha - \alpha I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(A_\alpha - \alpha I_3)$$

4,5

2. Supposons maintenant que $\alpha = -2$.

a. On utilise la question 1 pour déterminer les valeurs de $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$(A_{-2} + 2I_3)^2 = 3(A_{-2} + 2I_3)$$

$$(A_{-2} + 2I_3)^2 - 3(A_{-2} + 2I_3) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

$$(A_{-2} + 2I_3)(A_{-2} + 2I_3 - 3I_3) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

$$A_{-2}^2 + A_{-2} - 2I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

2

Finalement $\beta = 1$ et $\gamma = -2$

Remarque : On peut aussi déterminer les valeurs de β, γ avec les calculs.

$$A_{-2}^2 + \beta A_{-2} + \gamma I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 + \beta \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3-\beta+\gamma & -1+\beta & -1+\beta \\ -1+\beta & 3-\beta+\gamma & -1+\beta \\ -1+\beta & -1+\beta & 3-\beta+\gamma \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

Par identification, on obtient $\beta = 1, \gamma = -2$.

b. On déduit que A_{-2} est inversible et on calcule son inverse A_{-2}^{-1} .

$$A_{-2}^2 + A_{-2} - 2I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})} \implies A_{-2}(A_{-2} + I_3) = 2I_3$$

$$\implies A_{-2}\left(\frac{A_{-2} + I_3}{2}\right) = I_3$$

D'où la matrice A_{-2} est inversible car il existe $B = \frac{A_{-2} + I_3}{2}$ telle que $A_{-2}B = I_3$.

$$\text{et } A_{-2}^{-1} = \frac{A_{-2} + I_3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Déduire la solution du système suivant :

$$(S) : \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

L'écriture matricielle de (S) est $A_{-2}X = B$ où $A_{-2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a,

$$A_{-2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_{-2}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'examen de MATHS 2

Exercice n° 1.

1. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' = 12x - 10. \quad (1)$$

(a) Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (1) : L'équation homogène associée à (1) est

$$y'' - 2y' = 0 \dots\dots\dots(E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 - 2r = 0 \dots\dots\dots(C)$$

(C) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Donc la solution générale de (E_0) est

$$y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

1,5

(b) Détermination des constantes α et β pour que $y_1(x) = \alpha x^2 + \beta x$ soit une solution particulière de (1) : On a

$$y_1'(x) = 2\alpha x + \beta \quad \text{et} \quad y_1''(x) = 2\alpha.$$

Donc on aura

$$\begin{aligned} y_1'' - 2y_1' &= 12x - 10 \Leftrightarrow 2\alpha - 2(2\alpha x + \beta) = 12x - 10 \\ &\Leftrightarrow -4\alpha x + 2\alpha - 2\beta = 12x - 10 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -4\alpha = 12 \\ 2\alpha - 2\beta = -10 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

1

Donc

$$y_1(x) = -3x^2 + 2x.$$

(c) Détermination de la solution générale de (1) : La solution générale de (1) est

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_0(x) + y_1(x) \\ &= C_1 + C_2 e^{2x} - 3x^2 + 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

0,5

(d) Cherchons la solution de (1) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 4$. On a

$$y'(x) = 2C_2 e^{2x} - 6x + 2.$$

Par suite,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Finalement, la solution est

$$y(x) = e^{2x} - 3x^2 + 2x.$$

1

2. Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' + 2xy = x. \quad (2)$$

L'équation homogène associée est

$$y' + 2xy = 0 \dots\dots (E_0)$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -2x &\implies \frac{dy}{y} = -2x dx \\ &\implies \ln|y| = -x^2 + K_1, K_1 \in \mathbb{R} \\ &\implies y = C_1 e^{-x^2}, C_1 \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E_0) . Finalement, la solution générale de (E_0) est

$$y(x) = ce^{-x^2}, c \in \mathbb{R}.$$

On fait varier la constante c et la solution générale de (2) sera $y(x) = c(x) e^{-x^2}$.

On a $y' = C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2}$. Par suite

$$\begin{aligned} y' + 2xy = x &\implies C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} = x \\ &\implies C'(x) = xe^{x^2} \\ &\implies C(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + K, K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (2) est

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + K\right)e^{-x^2} = \frac{1}{2} + Ke^{-x^2}, K \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 2. Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x \, dx, n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculons I_0 et I_1 : On a

$$I_0 = \int_0^1 \sin \pi x \, dx = \frac{-\cos \pi x}{\pi} \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

$$I_1 = \int_0^1 x \sin \pi x \, dx.$$

Posons

$$\begin{aligned} f(x) = x &\implies f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin \pi x &\implies g(x) = \frac{-\cos \pi x}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-x \cos \pi x}{\pi} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos \pi x}{\pi} \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

2. Montrons que $\pi^2 I_n = \pi - (n-1)nI_{n-2}$: Posons

$$\begin{aligned} f(x) = x^n &\implies f'(x) = nx^{n-1} \\ g'(x) = \sin \pi x &\implies g(x) = \frac{-\cos \pi x}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$I_n = \frac{-x^n \cos \pi x}{\pi} \Big|_0^1 + \frac{n}{\pi} \int_0^1 x^{n-1} \cos \pi x dx$$
$$= \frac{1}{\pi} + \frac{n}{\pi} J_n, \text{ où } J_n = \int_0^1 x^{n-1} \cos \pi x dx.$$

Calcul de J_n : Posons

$$u(x) = x^{n-1} \implies u'(x) = (n-1)x^{n-2}$$
$$v'(x) = \cos \pi x \implies v(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Donc

$$J_n = \frac{x^{n-1} \sin \pi x}{\pi} \Big|_0^1 - \frac{(n-1)}{\pi} \int_0^1 x^{n-2} \sin \pi x dx$$
$$= -\frac{(n-1)}{\pi} J_{n-2}.$$

2,5

Finalement,

$$I_n = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi} I_{n-2},$$

c'est à dire

$$\pi^2 I_n = \pi - n(n-1) I_{n-2}.$$

3. Dédution de I_2 et I_3 : On a

$$\pi^2 I_2 = \pi - 2(2-1) I_0$$
$$= \pi - \frac{4}{\pi},$$

c'est à dire

$$I_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}.$$

0,5

On a

$$\pi^2 I_3 = \pi - 3(3-1) I_1$$
$$= \pi - \frac{6}{\pi},$$

c'est à dire

$$I_3 = \frac{\pi^2 - 6}{\pi^3}.$$

0,5

Exercice n° 3.

1. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Démontrons que A est inversible et calculons son inverse : Développement suivant la première colonne

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -1. \det A \neq 0, \text{ donc } A \text{ est}$$

inversible.

On a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{com}A),$$

avec

$$\text{com}A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

1

0,5

où

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

A_{ij} désigne la matrice d'ordre 2 déduite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Après calculs, on trouve

$$\text{Com}A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^t(\text{com}A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(1)}$$

(b) Dédution de la solution du système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ -2x + y - z = 1 \\ -2x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

On a

$$(S) \Leftrightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{(1,5)}$$

Remarque : On peut utiliser aussi la méthode de Cramer.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résolution suivant les valeurs de α du système suivant :

$$(S_\alpha) \begin{cases} 2x + y + \alpha z = 1 \\ -\alpha x + y - 2z = -2 \\ \alpha x - 3y + 4z = 4. \end{cases}$$

On a

$$(S_\alpha) \Leftrightarrow A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

où

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 & -2 \\ \alpha & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(1)}$$

$$\text{On a } \det A_\alpha = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -\alpha & -2 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ \alpha & -3 \end{vmatrix} = 2(\alpha+2)(\alpha-1).$$

i) Si $\alpha \neq -2$ et $\alpha \neq 1$ (i.e., $\det A_\alpha \neq 0$) alors (S_α) est un système de Cramer et admet une unique solution donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{2(\alpha+2)(\alpha-1)} = \frac{1}{\alpha+2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ -\alpha & -2 & -2 \\ \alpha & 4 & 4 \end{vmatrix}}{2(\alpha+2)(\alpha-1)} = \frac{-\alpha}{\alpha+2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & -2 \\ \alpha & -3 & 4 \end{vmatrix}}{2(\alpha+2)(\alpha-1)} = \frac{2}{\alpha+2} \quad \text{(0,5)}$$

ii) Si $\alpha = 1$: On a

$$(S_1) \Leftrightarrow A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_1 = 0$, donc le système (S_1) n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de A_1 on trouve

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \det M_1 = 3.$$

M_1 est associée au système

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 1 - z, \\ -x + y = -2 + 2z. \end{cases}$$

Les deux inconnues x, y sont les inconnues principales et z est un paramètre. (1) admet une solution (paramétrique) unique donnée par : $x = 1 - z$ et $y = -1 + z$.

On porte cette solution (x, y) dans la troisième équation du système (S_1)

$$x - 3y + 4z = (1 - z) - 3(-1 + z) + 4z = 1 - z + 3 - 3z + 4z = 4.$$

Finalement, (S_1) admet une infinité de solutions

$$\{(1 - z, -1 + z, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

ii) Si $\alpha = -2$: On a

$$(S_{-2}) \iff A_{-2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

où

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_{-2} = 0$, donc le système (S_{-2}) n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de A_{-2} on trouve

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \det M_2 = -4.$$

M_2 est associée au système

$$(2) \begin{cases} 2x + y = -2 + 2z, \\ -2x - 3y = 4 - 4z. \end{cases}$$

Les deux inconnues x, y sont les inconnues principales et z est un paramètre. (2) admet une solution (paramétrique) unique donnée par : $x = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}z$ et $y = -1 + z$.

On porte cette solution (x, y) dans la première équation du système (S_{-2})

$$2x + y - 2z = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}z\right) + (-1 + z) - 2z = -1 + z - 1 + z - 2z = -2 \neq 1.$$

Finalement, le système (S_{-2}) n'admet pas de solutions.

Remarque : On peut remarquer que les deux premières équations du système (S_{-2}) sont incompatibles, donc (S_{-2}) n'admet pas de solutions.

Corrigé de l'examen de rattrapage de MathsII

Exercice 1. (8 points)

I. On considère la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculons le déterminant de la matrice B . Il vient, en développant par rapport à la première ligne.

$$\det(B) = 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

b. La matrice B est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a $\det(B) = 3 \neq 0$ donc A inversible. Calculons l'inverse de A , on a $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^t(\text{com}(B))$.

$$\text{com}(B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad {}^t(\text{com}(B)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c. Résoudre avec deux méthodes différentes le système linéaire suivant :

– par la méthode de la matrice inverse

$$\begin{cases} -y + z & = 1 \\ x + y + z & = 2 \\ -x + y & = -1 \end{cases}$$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– méthode de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{0}{3} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

et donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (7 points)

1. Déterminons les constantes réelles a et b qui vérifient : $\frac{1}{x(2x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x-1}$.

$$\text{On a } \frac{1}{x(2x-1)} = \frac{2ax - a + bx}{x(2x-1)} \\ = \frac{(2a+b)x - a}{x(2x-1)}$$

En identifiant, on obtient : $a = -1$ et $b = 2$.

$$\text{donc } \frac{1}{x(2x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{2x-1}.$$

2. Trouver les primitives des fonctions $\frac{a}{x}$ et $\frac{b}{2x-1}$;

$$\int \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

et

$$\int \frac{2}{2x-1} = \ln|2x-1| + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

En déduire la primitive de la fonction $\frac{1}{x(2x-1)}$.

$$\int \frac{1}{x(2x-1)} = -\ln|x| + c_1 + \ln|2x-1| + c_2 \\ = \ln\left|\frac{2x-1}{x}\right| + C, \quad C = c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$$

3. **Résolution de l'équation différentielle suivante :**

$$x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = \frac{1}{2x-1} \quad (E).$$

On a

$$(E) \iff y' + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))}y = \frac{1}{(2x - 1)x(1 + \ln^2(x))} \quad (E1)$$

Résolution de l'équation homogène $y' + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} = 0$ (EH)

Pour $y \neq 0$

$$y' + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))}y = 0 \implies \frac{dy}{y} = -\frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))}dx$$

et par suite

$$\ln|y| = -\ln|1 + \ln^2(x)| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

D'où

$$y(x) = C \frac{1}{1 + \ln^2(x)}, \quad C = \mp e^{C_1} \in \mathbb{R}^*$$

$y = 0$ est une solution évidente de (EH). Finalement, la solution générale de (EH) est

$$y(x) = K \frac{1}{1 + \ln^2(x)}; \quad K \in \mathbb{R}$$

.

Résolution de l'équation avec second membre $(y' + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))}y = \frac{1}{(2x-1)x(1 + \ln^2(x))})$

Méthode de la variation de la constante :

Soit $y(x) = K \frac{1}{1 + \ln^2(x)}$ la solution générale de l'équation homogène. On fait varier la constante K , et la solution générale de l'équation avec second membre (E1) sera :

$$y(x) = K(x) \frac{1}{1 + \ln^2(x)}.$$

On a $y'(x) = K'(x) \frac{1}{1 + \ln^2(x)} + K(x) \frac{-2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))^2}$. En remplaçant y et y' dans l'équation (E1), on obtient

$$K'(x) = \frac{1}{x(2x - 1)}$$

Donc

$$K(x) = \int \frac{1}{x(2x - 1)} dx$$

par conséquent

$$K(x) = \ln \left| \frac{2x - 1}{x} \right| + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Finalement la solution générale de l'équation (E1) est

$$y(x) = \frac{\ln \left| \frac{2x - 1}{x} \right| + C}{1 + \ln^2(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$2y'' + y' - y = 4e^{\frac{1}{2}x} \dots (E)$$

Résolution de l'équation homogène

$$2y'' + y' - y = 0$$

L'équation caractéristique

$$2r^2 + r - 1 = 0 \dots (1)$$

admet une racine réelle double $r = -1$ et $r = \frac{1}{2}$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$m = \frac{1}{2}$ est une racine de l'équation caractéristique (1), donc on cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y_p(x) = P_0(x) x e^{\frac{1}{2}x}$$

avec $P_0(x) = A$.

c-à-d : $y_p(x) = A x e^{\frac{1}{2}x}$, $A \in \mathbb{R}$

$$y_p'(x) = A e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} A x e^{\frac{1}{2}x} = \left(A + \frac{1}{2} A x\right) e^{\frac{1}{2}x}$$

et

$$y_p''(x) = \frac{1}{2} A e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \left(A e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} A x e^{\frac{1}{2}x}\right) = \left(A + \frac{1}{4} A x\right) e^{\frac{1}{2}x}$$

En substituant dans l'équation (E) les expressions de y_p' et de y_p'' ; on obtient

$$(E) \implies 2A e^{\frac{1}{2}x} = 4e^{\frac{1}{2}x}$$

Par identification, on trouve $A = \frac{4}{3}$

D'où, une solution particulière y_p de (E) est

$$y_p(x) = \frac{4}{3} x e^{\frac{1}{2}x}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} y_G(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{4}{3} x e^{\frac{1}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ &= C_1 e^{-x} + \left(C_2 + \frac{4}{3} x\right) e^{\frac{1}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E).

Exercice 3. (5 points)

Calculons les deux intégrales suivantes :

1. $\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2) e^x dx$.

On peut utiliser l'intégration par parties trois fois pour calculer $\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2) e^x dx$. Il est souvent préférable d'utiliser la méthode de coefficients indéterminés, et on cherche une primitive de $x \mapsto (x^3 + \frac{1}{3}x^2) e^x$ sous la forme $(ax^3 + bx^2 + cx + d) e^x$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

On a $[(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x]' = (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x$

$$\begin{aligned} \implies (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x &= (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x \\ \implies (ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + (c + d))e^x &= (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x. \end{aligned} \quad \text{Par}$$

identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = \frac{1}{3} \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-8}{3} \\ c = \frac{16}{3} \\ d = \frac{-16}{3} \end{cases}$$

D'où

$$\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x dx = (x^3 + \frac{-8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{16}{3})e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

2. $\int \frac{(3 + 2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx.$

On pose : $t = 3 + 2\sqrt{x}$, donc $dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{(3 + 2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx &= \int t^5 dt \\ &= \frac{1}{(5+1)} t^{(5+1)} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{6} t^6 + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{6} (3 + 2\sqrt{x})^6 + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Finalemment,

$$\int \frac{(3 + 2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6} (3 + 2\sqrt{x})^6 + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$