

Corrigé de la série de T.D. N 2 : Equations différentielles

Exercice n° 1. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1.

$$(1 + x^2)^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 2xy^2 = 0 \dots\dots (1)$$

Solution :

$$\begin{aligned} (1) &\implies (1 + x^2)^2 \frac{dy}{dx} = -2x(1 + y^2) \\ &\implies \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx \text{ (cette équation est à variables séparées)} \\ &\implies \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = - \int 2x(1 + x^2)^{-2} dx \\ &\implies \arctan y = -\frac{1}{-2+1} (1 + x^2)^{-2+1} + c, c \in \mathbb{R} \\ &\implies \arctan y = \frac{1}{1+x^2} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \tan \left(\frac{1}{1+x^2} + c \right), c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (1) .

2.

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) dx - xydy = 0 \dots\dots (2) \\ y(1) = 2 \end{cases} \dots\dots (I)$$

Solution :

- On va résoudre d'abord l'équation (2)

$$\begin{aligned} (2) &\implies (x^2 + y^2) dx = xydy \\ &\implies \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ &\implies y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \\ &\implies y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &\implies y' = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \left(\frac{y}{x}\right) \dots\dots (2') \end{aligned}$$

Cette équation (2') est homogène car elle est de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, avec $f(v) = \frac{1}{v} + v$.

On pose le changement d'inconnue suivant : $v = \frac{y}{x}$. On a

$$\begin{aligned} v = \frac{y}{x} &\implies y = xv \\ &\implies y' = v + xv'. \end{aligned}$$

Puis, on remplace y' dans (2') et on obtient

$$\begin{aligned} (2') &\implies v + xv' = \frac{1}{v} + v \\ &\implies xv' = \frac{1}{v} \\ &\implies v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \\ &\implies v dv = \frac{1}{x} dx \text{ (cette équation est à variables séparées d'inconnue)} \\ &\implies \int v dv = \int \frac{1}{x} dx \\ &\implies \frac{1}{2} v^2 = \ln |x| + c, c \in \mathbb{R} \\ &\implies v^2 = 2 \ln |x| + 2c, c \in \mathbb{R} \\ &\implies v = \pm \sqrt{2 \ln |x| + C}, C = 2c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mais on a posé $y = xv$, alors

$$y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln |x| + C}, C \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (2)

On a $y(1) = 2$ donc $y(1) = \pm 1 \sqrt{2 \ln |1| + C} = 2 \Rightarrow \sqrt{C} = 2 \Rightarrow C = 4$. Finalement,

$$y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln |x| + 4}$$

est la solution du problème (I).

3.

$$y' + y = x^2 \dots\dots (3)$$

Solution :

(3) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à (3) est

$$y' + y = 0 \dots (E.H)$$

Résolution de l'équation homogène (E.H) : On a

$$(E.H) \Leftrightarrow y' = -y$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -1 &\implies \frac{dy}{y} = -dx \\ &\implies \int \frac{dy}{y} = \int -dx \\ &\implies \ln |y| = -x + c, c \in \mathbb{R} \\ &\implies |y| = e^{-x+c}, c \in \mathbb{R} \\ &\implies y = C_1 e^{-x}, C_1 = \pm e^c \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E.H). Finalement, la solution générale de (E.H) est

$$y(x) = k e^{-x}, k \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante : On fait varier la constante k et la solution générale de (3) sera

$$y(x) = k(x) e^{-x}.$$

On a $y'(x) = k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x}$. Par suite

$$\begin{aligned} y' + y = x^2 &\implies k'(x) e^{-x} = x^2 \\ &\implies k'(x) = x^2 e^x \\ &\implies k(x) = \int x^2 e^x dx. \end{aligned}$$

On peut utiliser l'intégration par parties deux fois pour calculer $\int x^2 e^x dx$. Il est souvent préférable d'utiliser la méthode de coefficients indéterminés, et on cherche une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sous la forme $(ax^2 + bx + c) e^x$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\int x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c) e^x, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\begin{aligned} [(ax^2 + bx + c) e^x]' = x^2 e^x &\implies (2ax + b) e^x + (ax^2 + bx + c) e^x = x^2 e^x \\ &\implies (ax^2 + (2a + b)x + b + c) e^x = x^2 e^x. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2. \end{cases}$$

D'où

$$k(x) = \int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + c, c \in \mathbb{R}$$

On a $y(x) = k(x) e^{-x}$, donc

$$y(x) = ((x^2 - 2x + 2) e^x + c) e^{-x}, c \in \mathbb{R}.$$

Finalement,

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}, c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (3).

Exercice n° 2. Résoudre les équations différentielles non linéaires du premier ordre suivantes :

1.

$$xy' + 6y - 3xy^{\frac{4}{3}} = 0 \dots (E)$$

Solution :

L'équation différentielle (E) est de Bernoulli.

$$(E) \iff \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}} + 6 \left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} \right) - 3x = 0, \text{ pour } y \neq 0.$$

Considérons le changement d'inconnue $z = \frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} = y^{-\frac{1}{3}}$. Alors, on aura

$$z' = -\frac{1}{3} y^{-\frac{4}{3}} y'.$$

D'où

$$y' = -3y^{\frac{4}{3}} z'.$$

En substituant dans l'équation (E) les expressions de y et de y' , on obtient

$$\begin{aligned} (E) &\iff \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}} + 6 \left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} \right) - 3x = 0 \\ &\iff -3xz' + 6z - 3x = 0. \end{aligned}$$

D'où, pour $x \neq 0$

$$z' - \frac{2}{x}z = -1 \dots (E').$$

L'équation (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z .

L'équation homogène associée à (E') est

$$z' - \frac{2}{x}z = 0 \dots (E'.h)$$

Résolution de l'équation (E'.h) : Pour $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} (E'.h) &\Rightarrow \frac{z'}{z} = \frac{2}{x}, \\ &\Rightarrow \ln |z| = 2 \ln |x| + k, k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow |z| = e^{\ln x^2 + k}, k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = \pm e^k x^2, k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = C_1 x^2, C_1 = \pm e^k, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$z = 0$ est une solution évidente de $(E'.h)$. Finalement la solution générale de $(E'.h)$ est

$$z_h(x) = cx^2, c \in \mathbb{R},$$

Variation de la constante : On fait varier la constante c et la solution générale de (E') sera

$$z(x) = c(x)x^2.$$

On a $z'(x) = c'(x)x^2 + 2xc(x)$. Par suite,

$$\begin{aligned} z' - \frac{2}{x}z &= -1 \implies c'(x) = \frac{-1}{x^2} \\ &\implies c(x) = \int \frac{-1}{x^2} dx \\ &\implies c(x) = \frac{1}{x} + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$z(x) = \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)x^2, \lambda \in \mathbb{R},$$

ou d'une manière équivalente,

$$z(x) = x + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E') . Mais on a

$$z = y^{\frac{-1}{3}}$$

Par suite,

$$y = \frac{1}{z^3}$$

D'où

$$y(x) = \frac{1}{(x + \lambda x^2)^3}, \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (E) .

2.

$$y' = x^2 + 1 - 2xy + y^2 \dots\dots\dots (E)$$

$(y_1 = x)$ est une solution particulière)

Solution :

L'équation (E) est une équation différentielle de Riccati. Considérons le changement d'inconnue

$$y = x + z.$$

Alors,

$$y' = 1 + z'.$$

En remplaçant y et y' dans (E) on obtient

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow 1 + z' = x^2 + 1 - 2x(x + z) + (x + z)^2, \\ &\Leftrightarrow z' = z^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{z'}{z^2} = 1 \dots\dots\dots (E')$$

L'équation (E') est à variables séparées. Donc

$$\begin{aligned} (E') &\Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx. \\ &\Rightarrow \int \frac{dz}{z^2} = \int dx, \\ &\Rightarrow \frac{-1}{z} = x + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$z(x) = \frac{-1}{x+c}, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E') . Mais

$$y = x + z,$$

donc

$$y = \frac{-1}{x+c} + x, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E) .

Exercice n° 3. Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :

1.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \dots\dots (E_1)$$

Solution :

L'équation caractéristique de (E_1) est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \dots\dots (E_1.C)$$

Cette équation $(E_1.C)$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de (E) est

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y'' + 2y' + y = 0 \dots\dots (E_2)$$

Solution :

L'équation caractéristique de (E_2) est

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \dots\dots (E_2.C)$$

Cette équation $(E_2.C)$ admet la racine réelle double $r = -1$. Ainsi, la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = (A + Bx)e^{-x}, A, B \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \dots\dots (E_3)$$

Solution :

L'équation caractéristique de (E_3) est

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \dots\dots (E_3.C)$$

Cette équation $(E_3.C)$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. Ainsi, la solution générale de (E_3) est

$$y(x) = (A \sin x + B \cos x) e^x, A, B \in \mathbb{R}.$$

4.

$$y'' - 2\alpha y' + y = 0 \dots (E_4)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution :

L'équation caractéristique de (E_4) est

$$r^2 - 2\alpha r + 1 = 0 \dots (E_4.C)$$

On a $\Delta = 4\alpha^2 - 4$.

Dans l'étude des racines de l'équation caractéristique $(E_4.C)$, trois cas peuvent se présenter selon le signe du discriminant Δ .

$$\begin{aligned} \Delta > 0 & \text{ si } \alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[; \\ \Delta = 0 & \text{ si } \alpha \in \{-1, 1\}; \\ \Delta < 0 & \text{ si } \alpha \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Premier cas : Si $\alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, on a : $\Delta > 0$ et l'équation $(E_4.C)$ admet deux racines réelles distinctes

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}, \\ r_2 &= \frac{2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = Ae^{(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})x} + Be^{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Deuxième cas : Si $\alpha \in \{-1, 1\}$, on a $\Delta = 0$ et l'équation $(E_4.C)$ admet une racine réelle double $r = \alpha$. Donc, la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = (A + Bx)e^{\alpha x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Troisième cas : Si $\alpha \in]-1, 1[$ on a $\Delta < 0$ et l'équation $(E_4.C)$ admet deux racines complexes conjuguées

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2\alpha + i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2} \\ r_2 &= \frac{2\alpha - i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha - i\sqrt{1 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = \left(A \sin \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \right) x + B \cos \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \right) x \right) e^{\alpha x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 4. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1.

$$y'' - y = x^2 + x + 1 \dots (E_1)$$

Solution :

L'équation homogène associée à (E_1) est

$$y'' - y = 0 \dots (E_1.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_1.H)$ est

$$r^2 - 1 = 0 \dots (E_1.C)$$

Les racines de l'équation $(E_1.C)$ sont : $r_1 = -1, r_2 = 1$. Ainsi, la solution générale de $(E_1.H)$ est

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^x, A, B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_1) :

On a le second membre de l'équation (E_1) est

$$f(x) = x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1) e^{0x}.$$

Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_1.C)$, donc on cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c) e^{0x} = ax^2 + bx + c,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$y_p'(x) = 2ax + b \text{ et } y_p''(x) = 2a.$$

En substituant dans l'équation (E_1) les expressions de y_p et de y_p'' , on obtient

$$(E_1) \Rightarrow 2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x + 1.$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a = 1, \\ -b = 1, \\ 2a - c = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = -1, \\ c = -3. \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_1) est

$$y_p(x) = -x^2 - x - 3.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^x, A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_1) .

2.

$$y'' - 2y' - 8y = e^x \dots (E_2)$$

Solution :

L'équation homogène associée à (E_2) est

$$y'' - 2y' - 8y = 0 \dots (E_2.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_2.H)$ est

$$r^2 - 2r - 8 = 0 \dots (E_2.C)$$

Les racines de l'équation $(E_2.C)$ sont : $r_1 = -2, r_2 = 4$. Ainsi, la solution générale de $(E_2.H)$ est

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{4x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_2) :

On a le second membre de l'équation (E_2) est

$$f(x) = e^x = e^{1x}.$$

Comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_2.C)$, donc on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme : $y_p(x) = ae^x$ où $a \in \mathbb{R}$. On a

$$y_p'(x) = ae^x \quad \text{et} \quad y_p''(x) = ae^x.$$

En substituant dans l'équation (E_2) les expressions de y_p , y_p' et de y_p'' , on obtient

$$(E_2) \Rightarrow ae^x - 2ae^x - 8ae^x = e^x,$$

Par identification, on obtient

$$\begin{aligned} \Rightarrow -9a &= 1 \\ \Rightarrow a &= \frac{-1}{9}. \end{aligned}$$

Donc, une solution particulière y_p de (E_2) est

$$y_p(x) = \frac{-1}{9}e^x.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= \frac{-1}{9}e^x + Ae^{-2x} + Be^{4x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_2) .

3.

$$y'' - 2y' = \sin x \dots (E_3)$$

Solution :

L'équation homogène associée à (E_3) est

$$y'' - 2y' = 0 \dots (E_3.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_3.H)$ est

$$r^2 - 2r = 0 \dots (E_3.C)$$

Les racines de l'équation $(E_3.C)$ sont : $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de $(E_3.H)$ est

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x} + Be^{2x}, \\ &= A + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_3) :

On a le second membre de l'équation (E_3) est

$$f(x) = \sin x = \sin(1x) e^{0x}.$$

Comme $0 + 1i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_3.C)$, donc on cherche une solution particulière y_p de l'équation (E_3) sous la forme

$$y_p(x) = a \sin x + b \cos x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_p'(x) = a \cos x - b \sin x \text{ et } y_p''(x) = -a \sin x - b \cos x.$$

En substituant dans l'équation (E_3) les expressions de y_p, y_p' et de y_p'' , on obtient

$$\begin{aligned}(E_3) &\Rightarrow -a \sin x - b \cos x - 2(a \cos x - b \sin x) = \sin x, \\ &\Rightarrow (-a + 2b) \sin x + (-b - 2a) \cos x = \sin x.\end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a + 2b = 1, \\ -b - 2a = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5}, \\ b = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Donc une solution particulière y_p de l'équation (E_3) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A + Be^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x, \quad A, B \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

est la solution générale de (E_3) .

4.

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x} \dots\dots (E_4) \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases} \dots\dots (I)$$

Solution :

- On va résoudre d'abord l'équation (E_4) :

L'équation homogène associée à (E_4) est

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \dots\dots (E_4.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_4.H)$ est

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \dots\dots (E_4.C)$$

Les racines de l'équation $(E_4.C)$ sont : $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de $(E_4.H)$ est

$$y(x) = Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_4) :

On a le second membre de l'équation (E_4) est

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

Comme -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_4.C)$, donc on cherche une solution particulière de (E_4) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax + b)e^{-x}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_p'(x) = (-ax + a - b)e^{-x} \text{ et } y_p''(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}.$$

En substituant dans l'équation (E_4) les expressions de y_p, y'_p et de y''_p , on obtient

$$(E_4) \Rightarrow (ax - 2a + b)e^{-x} - 4(-ax + a - b)e^{-x} + 3(ax + b)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x},$$

$$\Rightarrow 8ax - 6a + 8b = 2x + 1.$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 8a = 2, \\ -6a + 8b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{5}{16}. \end{cases}$$

Donc, une solution particulière y_p de (E_4) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_4) .

Pour le problème de Cauchy (I) , on a

$$Y(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0 \dots (1)$$

On a aussi

$$Y'(x) = \left(\frac{-1}{4}x + \frac{-1}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x}.$$

D'où

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{16} + A + 3B = 0 \dots (2)$$

De (1) et (2), on a

$$\begin{cases} \frac{5}{16} + A + B = 0 \\ \frac{-1}{16} + A + 3B = 0, \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = \frac{3}{16}. \end{cases}$$

Finalement,

$$Y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{16}e^{3x},$$

est la solution de problème du Cauchy (I) .

Exercice n° 5. (Exercice supplémentaire) Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $x \frac{dy}{dx} - (x+1)y = 0$. (Réponse : $y(x) = \lambda x e^x, \lambda \in \mathbb{R}$).
- $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$. (Réponse : $y(x) = \lambda x + x \ln|x|, \lambda \in \mathbb{R}$).
- $xy' - 2y = \frac{1}{2}x^3$. (Réponse : $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}$).
- $y' - \frac{1}{x}y - xy^2 = 0$. (Réponse : $y(x) = \frac{1}{-\frac{x^2}{3} + \frac{\lambda}{x}}, \lambda \in \mathbb{R}$).
- $y' = \frac{1}{x}y^2 - (2 + \frac{1}{x})y + x + 2$, ($y_1 = x$ est une solution particulière). (Réponse : $y(x) = x + \frac{1}{\lambda x + 1}, \lambda \in \mathbb{R}$).
- $y'' - 5y' + 6y = 0$. (Réponse : $y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, A, B \in \mathbb{R}$).

7. $4y'' + 4y' + y = 0$. (Réponse : $y(x) = (A + Bx)e^{-\frac{1}{2}x}$, $A, B \in \mathbb{R}$).

8. $y'' + y' + y = 0$. (Réponse : $y(x) = \left(A \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$, $A, B \in \mathbb{R}$).

9. $y'' - 2y' + my = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Réponse :

Si $m \in]-\infty, 1[$, $y(x) = Ae^{(1+\sqrt{1-m})x} + Be^{(1-\sqrt{1-m})x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Si $m \in]1, +\infty[$, $y(x) = (A \sin(\sqrt{m-1})x + B \cos(\sqrt{m-1})x)e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Si $m = 1$, $y(x) = (Ax + B)e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

10. $y'' - y' = 12x - 10$. (Réponse : $y(x) = A + Be^x - 6x^2 - 2x$, $A, B \in \mathbb{R}$).

11. $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{1}{2}x}$. (Réponse : $y(x) = (A + Bx + \frac{1}{8}x^2)e^{-\frac{1}{2}x}$, $A, B \in \mathbb{R}$).

12. $y'' + 4y = \cos x$. (Réponse : $y(x) = A \sin 2x + B \cos 2x + \frac{1}{3} \cos x$, $A, B \in \mathbb{R}$).

13. $y'' - 2y' + y = (x + 2)e^x$. (Réponse : $y(x) = (\frac{1}{6}x^3 + x^2 + Ax + B)e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$).

Corrigé de la série de TD n°1

Exercice n°1

1. $\int \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} dx$

On a

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} dx &= \int \frac{1}{x^2} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{1}{x} + 2 \ln |x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{4x + 7}{\sqrt{2x^2 + 7x}} dx$

On a

$$\int \frac{4x + 7}{\sqrt{2x^2 + 7x}} dx = 2\sqrt{2x^2 + 7x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

L'utilisation de $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$.

3. $\int \cos(7x + 1) dx$.

On a,

$$\begin{aligned} \int \cos(7x + 1) dx &= \frac{1}{7} \int 7 \cos(7 + 1) dx \\ &= \frac{1}{5} \sin(5x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'utilisation de $\int f'(x)g(f(x))dx = G(f(x)) + c$, où G est la primitive de g et $c \in \mathbb{R}$.

4. $\int x\sqrt{1-x^2} dx$. On a,

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'utilisation de $\int f'(x)f^\alpha(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$, $\alpha, c \in \mathbb{R}$.

5. $\int e^x (1 + e^x)^4 dx$

On a

$$\int e^x (1 + e^x)^4 dx = \frac{(e^x)^5}{5} + c = \frac{e^{5x}}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

L'utilisation de $\int f'(x)f^n(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$.

6. $\int \frac{6x-6}{x^2-2x+3}dx$

On a

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-6}{x^2-2x+3}dx &= 3 \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}dx \\ &= 3 \ln|x^2-2x+3| + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

L'utilisation de $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c, c \in \mathbb{R}$.

Exercice n°2

En utilisant l'intégration par parties, calculer

1. $\int (2x+1)e^x dx$.

On pose

$$\begin{aligned}u(x) &= (2x+1) \Rightarrow u'(x) = 2, \\ v'(x) &= e^x \Rightarrow v(x) = e^x,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^x dx &= (2x+1)e^x - \int 2e^x dx \\ &= (2x+1)e^x - 2e^x + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= (2x-1)e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. $\int x^2 \cos x dx$

on pose :

$$\begin{aligned}u(x) &= x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x \\ v'(x) &= \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x\end{aligned}$$

donc

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx,$$

Intégrons par partie une deuxième fois :

on pose :

$$\begin{aligned}u(x) &= x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) &= \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x\end{aligned}$$

donc

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x,$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + c \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

3. $\int \arctan x dx$

on pose :

$$u(x) = \arctan x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

donc

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. $\int e^{-x} \sin x dx$

On pose

$$u(x) = e^{-x} \Rightarrow u'(x) = -e^{-x}$$

$$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x.$$

Donc

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx$$

encore une deuxième fois intégration par parties pour $\int e^{-x} \cos x dx$

$$u(x) = e^{-x} \Rightarrow u'(x) = -e^{-x}$$

$$u'(x) = \cos x \Rightarrow u(x) = \sin x$$

$$\int e^{-x} \cos x dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x dx &= -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx \right) \\ \int e^{-x} \sin x dx &= -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) + C \end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$

Exercice n°3

En effectuant un changement de variable, calculons

a) $\int \frac{e^{2x+1}}{2+5e^{2x+1}} dx$.

En posant

$$t = e^{2x+1} \Rightarrow dt = 2e^{2x+1} dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2e^{2x+1}} dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2t} dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{(2x+1)}}{2+5e^{(2x+1)}} dx &= \int \frac{t}{2+5t} \frac{1}{2t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2+5t} dt \\ &= \frac{1}{10} \int \frac{5}{2+5t} dt \\ &= \frac{1}{10} \ln |2+5t| + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{10} \ln |2+5e^{2x+1}| + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

On pose :

$$t^2 = x - 1 \Rightarrow dx = 2t dt \text{ et } x = t^2 + 1$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= 2 \int \frac{t}{t^2+1} (t dt) = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt \\ &= 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= 2t - 2 \arctan t + c, c \in \mathbb{R} \\ &= 2\sqrt{x-1} - 2 \arctan \sqrt{x-1} + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

c) $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^4} dx$

On pose :

$$\begin{aligned}t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \\ \int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^4} dx &= \int \frac{1}{(1+t)^4} dt \\ &= \frac{-1}{3} \frac{1}{(1+t)^3} + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{-1}{3(1+\sin x)^3} + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Exercice n°4

Calculons :

a) A priori il faut décomposer $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ en éléments simples mais

$$(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$$

Donc $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ est de la forme $\frac{f'(x)}{f(x)}$ et alors

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx = \ln |x^2 + 3x - 10| + c, c \in \mathbb{R}.$$

b)

$$\int \frac{x^3}{x^2 - x - 6} dx$$

1-ère étape : effectuer la division euclidienne

$$\frac{x^3}{x^2 - x - 6} = x + 1 + \frac{7x + 6}{x^2 - x - 6}$$

2-ème étape : décomposer en fractions simples

$$\frac{7x + 6}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{(A + B)x + (-3A + 2B)}{(x + 2)(x - 3)}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} (A + B) = 7 \\ (-3A + 2B) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A + 3B = 21 \\ (-3A + 2B) = 6 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{8}{5}, B = \frac{27}{5},$$

d'où

$$\frac{7x + 6}{x^2 - x - 6} = \frac{7x + 6}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{\frac{8}{5}}{x + 2} + \frac{\frac{27}{5}}{x - 3} = \frac{8}{5(x + 2)} + \frac{27}{5(x - 3)}.$$

Puis,

$$\frac{x^3}{x^2 - x - 6} = x + 1 + \left(\frac{8}{5}\right) \frac{1}{x + 2} + \left(\frac{27}{5}\right) \frac{1}{x - 3}$$

3-ème étape : intégrer

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 - x - 6} dx &= \int (x + 1) dx + \frac{8}{5} \int \frac{1}{x + 2} dx + \frac{27}{5} \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{8}{5} \ln|x + 2| + \frac{27}{5} \ln|x - 3| + c \end{aligned}$$

c) $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 2x + 10} dx.$

On a :

$$x^2 - 2x + 10 = (x - 1)^2 + 9$$

On pose : $x - 1 = 3t \Rightarrow dx = 3 dt$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x + 1}{x^2 - 2x + 10} dx &= \int \frac{3(3t + 1) + 1}{9t^2 + 9} 3dt \\
 &= \int \frac{27t + 12}{9(t^2 + 1)} dt \\
 &= 3 \int \frac{t}{t^2 + 1} dt + \frac{4}{3} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\
 &= \frac{3}{2} \ln(t^2 + 1) + \frac{4}{3} \arctan(t) + c, c \in \mathbb{R}, \\
 &= \frac{3}{2} \ln\left(\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + 1\right) + \frac{4}{3} \arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + c, c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Exercice n°5

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^\pi \cos^3 x dx \\
 &= \int_0^\pi \cos^2 x \cos x dx \\
 &= \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\
 &= \int_0^\pi \cos x dx - \int_0^\pi \sin^2 x (\cos x) dx
 \end{aligned}$$

Calculons $\int \sin^2(x) \cos(x) dx$.

On pose $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x) dx$. Donc

$$\int \sin^2(x) \cos(x) dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + c = \frac{1}{3} \sin^3(x) + c.$$

Alors $I_1 = [\sin x]_0^\pi - \frac{1}{3} [\sin^3 x]_0^\pi = 0$.

$$I_2 = \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

On utilise les deux formules suivantes :

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

et

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

d'où

$$\begin{aligned}\sin^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\ &= \frac{1}{4}(1 - \cos^2(2x)) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x)\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)\right) \\ &= \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int_0^\pi \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^\pi (1 - \cos(4x)) dx \\ &= \left[\frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin(4x) \right) \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos 2x \sin 3x dx$$

On utilise la formule suivante :

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(b - a) + \sin(a + b)],$$

donc :

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{2}[\sin(3x - 2x) + \sin(3x + 2x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin x dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin 5x dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= 2[x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 \frac{\pi}{4} - \left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 \right) = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Corrigé de la série de TD n°1 de Maths 2

Intégrales et calcul des primitives

Exercice n°1

Calculons les primitives suivantes :

$$\begin{aligned} a) \int \frac{4x - 4}{x^2 - 2x + 3} dx &= 2 \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3} dx \\ &= 2 \ln |x^2 - 2x + 3| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

$$\begin{aligned} b) \int \frac{1 + \ln x}{x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int 2 \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \ln |x| + \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En utilisant les formules :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C, \quad \int f'(x) f^n(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C.$$

$$\begin{aligned} c) \int \cos(5x + 2) dx &= \frac{1}{5} \int 5 \cos(5x + 2) dx \\ &= \frac{1}{5} \sin(5x + 2) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \int (2x - 2) \sqrt{x^2 - 2x + 3} dx &= \int (2x - 2) (x^2 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{3} (x^2 - 2x + 3)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

En utilisant la formule :

$$\int f'(x)f^n(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int \sin x e^{\cos x} dx &= - \int -\sin x e^{\cos x} dx \\ &= -e^{\cos x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule :

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C.$$

$$\text{f) } \int 6x(3x^2 + 4)^3 dx = \frac{(3x^2 + 4)^4}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la formule :

$$\int f'(x)f^n(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C.$$

Exercice n°2

En utilisant l'intégration par parties, calculons les primitives suivantes :

a) $\int (2x + 1)e^{2x} dx$.

On pose

$$u(x) = (2x + 1) \Rightarrow u'(x) = 2,$$

$$v'(x) = e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

donc

$$\begin{aligned} \int (2x + 1)e^{2x} dx &= (2x + 1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2}(2x + 1)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) $\int x^2 \sin x dx$.

On pose

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$$

L'intégration par parties donne :

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

Nous calculons maintenant $\int x \cos x dx$ par intégration par parties :

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$$

Ce qui donne :

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x$$

En remplaçant dans l'expression de $\int x^2 \sin x \, dx$, on obtient :

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

c) $\int (x+1)\sqrt{2x+1} \, dx$.

On pose

$$u(x) = (x+1) \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int (x+1)\sqrt{2x+1} \, dx &= (x+1)\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{(x+1)}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \int (2x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{(x+1)}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \int 2(2x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{(x+1)}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \frac{2}{\frac{5}{2}} (2x+1)^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{(x+1)}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d) $\int x^3 \ln(3x) \, dx$.

On pose

$$u(x) = \ln(3x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x^3 \Rightarrow v(x) = \frac{x^4}{4}$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln(3x) \, dx &= \frac{x^4}{4} \ln(3x) - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(3x) - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(3x) - \frac{1}{16} x^4 + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice n°3

En effectuant un changement de variable, calculer :

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Posons $x = \sqrt{t}$ alors $x = t^2$, d'où $dx = 2t dt$.

L'intégrale devient :

$$\int \frac{1-t}{t} 2t dt = 2 \int (1-t) dt = t - \frac{t^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

b. Calcul de l'intégrale :

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Posons $t = \cos x$, d'où $dx = \frac{-dt}{\sin x}$. L'intégrale devient :

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{-dt}{1 + t^2} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = -\arctan x + c.$$

c) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$

Posons $t = e^x + 1 \implies dt = e^x dx$, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx &= \int \frac{e^x dt}{t e^x} \\ &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \ln |t| + c = \ln |e^x + 1| + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice n°4

Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

Calcul de l'intégrale :

$$\int \frac{2x - 1}{(x - 1)(x + 2)} dx.$$

On décompose la fraction en fractions partielles :

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} = \frac{(A + B)x + (2A - B)}{(x - 1)(x + 2)}$$

Par identification on a :

$$\begin{aligned} A + B &= 2, \\ 2A - B &= -1. \end{aligned}$$

En résolvant ce système, nous trouvons $A = \frac{1}{3}$ et $B = \frac{5}{3}$.

Nous avons donc :

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{1/3}{x - 1} + \frac{5/3}{x + 2}.$$

L'intégrale devient :

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1/3}{x-1} + \frac{5/3}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{5}{3} \ln|x+2| + C.$$

b) $\int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} dx.$

1-ère étape : Effectuer la division euclidienne :

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x + 1} = x + 2 + \frac{x - 5}{x^2 + 2x + 1}$$

2-ème étape : Décomposer $\frac{x-5}{x^2+2x+1}$ en fractions simples :

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{x^2+2x+1} &= \frac{x-5}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2} \\ &= \frac{Ax + (A+B)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ A + B &= -5 \quad \Rightarrow \quad B = -6. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{x-5}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x + 1} = x + 2 + \frac{1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2}.$$

3-ème étape : Intégrer :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x + 1} dx &= \int \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \int (x+2) dx + \int \frac{1}{x+1} dx - 6 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+1| - 6 \cdot \frac{-1}{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx$.
 On a :

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$$

En posant : $x + 1 = 2t$ (et donc $dx = 2dt$), on obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{2t+3}{4(t^2+1)} 2dt \\ &= \int \frac{4t}{4(t^2+1)} dt + \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + \frac{3}{2} \arctan t + c \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice n°5

Intégrons les fonctions trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \cos^3 x dx \\ &= \int_0^\pi \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int_0^\pi \cos x dx - \int_0^\pi \sin^2 x (\cos x) dx \end{aligned}$$

Calculons $\int \sin^2(x) \cos(x) dx$.

On pose $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x) dx$. Donc

$$\int \sin^2(x) \cos(x) dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + c = \frac{1}{3} \sin^3(x) + c.$$

Alors $I_1 = [\sin x]_0^\pi - \frac{1}{3} [\sin^3 x]_0^\pi = 0$.

$$I_2 = \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

On utilise les deux formules suivantes :

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

et

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

d'où

$$\begin{aligned}\sin^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2(2x)) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x)\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)\right) \\ &= \frac{1}{8} (1 - \cos(4x))\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int_0^\pi \frac{1}{8} (1 - \cos(4x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^\pi (1 - \cos(4x)) dx \\ &= \left[\frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin(4x)\right) \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin 4x \cos 3x dx.$$

On utilise l'identité :

$$\sin B \cos A = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)].$$

On a

$$\sin 4x \cos 3x = \frac{1}{2} [\sin(7x) + \sin(x)].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi [\sin(7x) + \sin x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{1}{7} \cos 7x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi + [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) = \frac{4}{7}.\end{aligned}$$

$$I_4 = \int_0^\pi \cos^6 x \sin^3 x dx$$

on a

$$\int \cos^6 x \sin^3 x dx = \int \cos^6 x \sin^2 x \sin x dx = \int \cos^6 x (1 - \cos^2) x \sin x dx$$

On pose $t = \cos x$ d'où $dt = -\sin x dx$ Alors :

$$\int \cos^6 x (1 - \cos^2) x \sin x dx = - \int t^6 (1 - t^2) dt = \frac{1}{9} t^9 - \frac{1}{7} t^7 + c$$

donc

$$I_4 = \left[\frac{1}{9} \cos^9 x - \frac{1}{7} \cos^7 x \right]_0^\pi = \frac{2}{63} + \frac{2}{63} = \frac{4}{63}$$