Département FI(LMD) SECSG **Lundi 25 mai 2026**

Université de Bejaia

1ère année

Examen de mathématiques(II)

Durée 1h30mn

Exercice1(10pts) I- On considère la matrice A définie par :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}} \text{ telle que : } a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \times 2^{j-i} & ; \quad si\ i \neq j \\ 0 & ; \quad si\ i = j \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A.
2. Calculer : $a_{12} \times a_{23} \times a_{31} - a_{21} \times a_{32} \times a_{13}$.
3. Donner la transposée de A.

II- Calcul Matriciel.

4. Vérifier que : $A^2 = A + 2I_3$.
5. Montrer par récurrence pour tout $n \geq 1$: $A^n = \frac{2^n-(-1)^n}{3} A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3} I_3$.

III- Soit la matrice $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et l'équation matricielle (S) : $AX = b$.

6. Montrer que A est inversible et donner son inverse. (Utiliser le résultat de la question 4)
7. En utilisant la matrice inverse de A, trouver la matrice X telle que :

$$AX = b$$

Exercice2(5pts) Soit le système d'équations linéaires (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

1. Donner la matrice des coefficients A et la matrice augmentée $\tilde{A}$ du système (S).
2. Ecrire le système (S) sous la forme matricielle.
3. Vérifier que le système (S) est de Cramer.
4. Résoudre le système (S) par la méthode de Cramer.

Exercice3(05pts) Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3x + y + 2z = 1 \\ -2x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Fin du sujet

N.B. Justifiez tous vos calculs; un résultat non justifié ne sera pas pris en compte.