Corrigé de l'examen de mathématiques(II)
Durée 1h30mn

Corrigé De L'Exercice1 (10pts) I- On a la matrice suivante :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}} \text{ telle que : } a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}\times 2^{j-i} & ; \ si\ i\neq j \\ 0 & ; \ si\ i=j \end{cases}$$

---

1. La matrice A (01pts)

On a d'une part, par définition : $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Et en d'autre part, en appliquant à chaque élément a_{ij} l'équation correspondante, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{1+2}\times 2^{2-1} & (-1)^{1+3}\times 2^{3-1} \\ (-1)^{2+1}\times 2^{1-2} & 0 & (-1)^{2+3}\times 2^{3-2} \\ (-1)^{3+1}\times 2^{1-3} & (-1)^{3+2}\times 2^{2-3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1/2 & 0 & -2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

2. Le calcul (01pts)

$$a_{12}\times a_{23}\times a_{31} - a_{21}\times a_{32}\times a_{13} = (-2)(-2)\left(\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(4) = 1 - 1 = 0.$$

---

3. La transposée (01pts)

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/4 \\ -2 & 0 & -1/2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

II- Calcul Matriciel :

4. Vérification $A^2 = A + 2I_3$ (02pts)

$$A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1/2 & 0 & -2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1/2 & 0 & -2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1\times C_1 & L_1\times C_2 & L_1\times C_3 \\ L_2\times C_1 & L_2\times C_2 & L_2\times C_3 \\ L_3\times C_1 & L_3\times C_2 & L_3\times C_3 \end{pmatrix}$$

Où L_i est la ieme ligne de la 1ère matrice et C_j est la jeme colonne de la 2ème matrice du produit.

Les éléments de la première ligne (0.5pts)

$$L_1\times C_1 = (0 \quad -2 \quad 4)\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = (0)(0) + (-2)(-1/2) + (4)(1/4) = 0 + 1 + 1 = \mathbf{2}.$$

$$L_1\times C_2 = (0 \quad -2 \quad 4)\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = (0)(-2) + (-2)(0) + (4)(-1/2) = 0 + 0 - 2 = \mathbf{-2}.$$

$$L_1\times C_3 = (0 \quad -2 \quad 4)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)(4) + (-2)(-2) + (4)(0) = 0 + 4 + 0 = \mathbf{4}.$$

Les éléments de la deuxième ligne (0.5pts)

$$L_2\times C_1 = (-1/2 \quad 0 \quad -2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = (-1/2)(0) + (0)(-1/2) + (-2)(1/4) = 0 + 0 - \frac{1}{2} = \mathbf{-1/2}.$$

$$L_2 \times C_2 = (-1/2 \quad 0 \quad -2)\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = (-1/2)(-2) + (0)(0) + (-2)(-1/2) = 1 + 0 + 1 = \mathbf{2}.$$

$$L_2 \times C_3 = (-1/2 \quad 0 \quad -2)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1/2)(4) + (0)(-2) + (-2)(0) = -2 + 0 + 0 = \mathbf{-2}.$$

Les éléments de la troisième ligne (0.5pts)

$$L_3 \times C_1 = (1/4 \quad -1/2 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = (1/4)(0) + (-1/2)(-1/2) + (0)(1/4) = 0 + 1/4 + 0 = \mathbf{1/4}.$$

$$L_3 \times C_2 = (1/4 \quad -1/2 \quad 0)\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = (1/4)(-2) + (-1/2)(0) + (0)(-1/2) = -1/2 + 0 + 0 = \mathbf{-1/2}.$$

$$L_3 \times C_3 = (1/4 \quad -1/2 \quad 0)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1/4)(4) + (-1/2)(-2) + (0)(0) = 1 + 1 + 0 = \mathbf{2}.$$

Ce qui nous donne : **(0.5pts)**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1/2 & 2 & -2 \\ 1/4 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1/2 & 0 & -2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1/2 & 0 & -2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En d'autre terme : $A^2 = A + 2I_3$.

---

5. **La récurrence (01.5pts)**

On montre que pour tout $n \geq 1$: $A^n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3 \qquad (*)$

Pour $n = 1$, on a d'une part : $A^1 = A$.

Et en d'autre part : $\frac{2^1-(-1)^1}{3}A + \frac{2^1+2(-1)^1}{3}I_3 = A + 0I_3 = A$.

Donc, $A^1 = \frac{2^1-(-1)^1}{3}A + \frac{2^1+2(-1)^1}{3}I_3$. D'où la propriété $(*)$ est vraie pour $n = 1$.

Supposons que $A^n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3$, montrons alors $A^{n+1} = \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}A + \frac{2^{n+1}+2(-1)^{n+1}}{3}I_3$. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = \left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3\right) \times A = \frac{2^n-(-1)^n}{3}A^2 + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}A \\ &= \frac{2^n-(-1)^n}{3}(A + 2I_3) + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}A = \frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n-(-1)^n}{3}2I_3 + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}A \\ &= \left(\frac{2^n-(-1)^n}{3} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}\right)A + \frac{2^{n+1}-2(-1)^n}{3}I_3 = \left(\frac{2^n-(-1)^n+2^n+2(-1)^n}{3}\right)A + \frac{2^{n+1}+2(-1)^{n+1}}{3}I_3 \\ &= \left(\frac{2\times 2^n+(-1)^n}{3}\right)A + \frac{2^{n+1}+2(-1)^{n+1}}{3}I_3 = \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}A + \frac{2^{n+1}+2(-1)^{n+1}}{3}I_3. \end{aligned}$$

D'où $(*)$ est vraie pour $n+1$.

Et par conséquent $(*)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

III- On a la matrice $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et l'équation matricielle (S) : $AX = b$.

6. **Montrons que A est inversible et donnons son inverse (01.5pts)**

Il suffit de mettre l'expression "$A^2 = A + 2I_3$" sous la forme $A \times B = I_3$ ou $B \times A = I_3$.

On sait que : $A^2 = A + 2I_3 \Longrightarrow A^2 - A = 2I_3 \Longrightarrow \frac{1}{2}(A^2 - A) = I_3 \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(A - I_3)}_{B} \times A = I_3$.

Cette dernière égalité signifie que A est inversible et son inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1/2 & 0 & -2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1/2 & -1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

7. Résolution de l'équation matricielle (02pts)

A est inversible, alors l'équation $AX = b$ admet une seule solution donnée par : $X = A^{-1}b$. (0.5pts)

Ainsi, $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1/2 & -1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} L_1 \times C_1 \\ L_2 \times C_1 \\ L_3 \times C_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$. (01.5pts)

$$L_1 \times C_1 = (-1 \quad -2 \quad 4)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)(4) + (-2)(2) + (4)(2) = -4 - 4 + 8 = \mathbf{0}.$$

$$L_2 \times C_1 = (-1/2 \quad -1 \quad -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1/2)(4) + (-1)(2) + (-2)(2) = -2 - 2 - 4 = \mathbf{-8}.$$

$$L_3 \times C_1 = (1/4 \quad -1/2 \quad -1)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (1/4)(4) + (-1/2)(2) + (-1)(2) = 1 - 1 - 2 = \mathbf{-2}.$$

Corrigé De L'Exercice2 (05pts)

On a le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

1. La matrice des coefficients A et la matrice augmentée $\tilde{A}$ (0.5pts)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

2. Ecriture matricielle de (S) (0.5pts)

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on a : $(S) \Leftrightarrow AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Vérification que (S) est de Cramer (01pts)

On a par Sarrus:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right| = (0)(0)(0) + (1)(1)(1) + (1)(1)(1) - (1)(0)(1) - (0)(1)(1) - (1)(1)(0)$$

$$= 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0$$

D'où le système (S) est de Cramer.

4. Résolution de (S) par Cramer (03pts)

Comme le système est de Cramer ($\det A \neq 0$), il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer : (0.5pts)

■ $\boldsymbol{x_1} = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 \\ \mathbf{4} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$ ■ $\boldsymbol{x_2} = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \\ 1 & \mathbf{4} & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$ ■ $\boldsymbol{x_3} = \frac{|A_{x_3}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & \mathbf{4} \end{vmatrix}}{2} = \frac{\mathbf{0}}{2} = \mathbf{0}.$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

■ $|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 \\ \mathbf{4} & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{4} & 1 \end{matrix} = (1)(0)(0) + (1)(1)(4) + (1)(3)(1) - (1)(0)(4) - (1)(1)(1) - (1)(3)(0)$

$= 0 + 4 + 3 - 0 - 1 - 0 = \mathbf{6}$. **(0.5pts)**

■ $|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \\ 1 & \mathbf{4} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{3} \\ 1 & \mathbf{4} \end{matrix} = (0)(3)(0) + (1)(1)(1) + (1)(1)(4) - (1)(3)(1) - (0)(1)(4) - (1)(1)(0)$

$= 0 + 1 + 4 - 3 - 0 - 0 = \mathbf{2}$. **(0.5pts)**

■ $|A_{x_3}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & \mathbf{4} \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} = (0)(3)(4) + (1)(3)(1) + (1)(1)(1) - (1)(0)(1) - (0)(3)(1) - (1)(1)(4)$

$= 0 + 3 + 1 - 0 - 0 - 4 = \mathbf{0}$. **(0.5pts)**

Finalement, l'unique solution du système (S) est : $\bar{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **(01pts)**

Corrigé De L'Exercice3 (05pts) La résolution du système (S) par Gauss :

$$(S)\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3x + y + 2z = 1 \\ -2x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

■ **L'échelonnement de la matrice augmentée (02pts)**

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + (3)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (2)L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{7} & -1 & 7 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \end{array}\right) L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1/7 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 6 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + (-6)L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1/7 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1/7} & 0 \end{array}\right) L_3 \leftarrow -7L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1/7 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) = \tilde{A}_e$$

■ **Le système (S_e) associé à la matrice $\tilde{A}_e$ (0.5pts)**

$$(S_e)\begin{cases} \boldsymbol{x} + 2y - z = 2 \\ \boldsymbol{y} - \frac{1}{7}z = 1 \\ \boldsymbol{z} = 0 \end{cases}$$

Le système (S) admet une seule solution (Dans (S_e) : nombre d'équations = nombre de variables).

■ **La résolution de (S_e) (01.5pts)**

Le système échelonné (S_e) se résout par rapport aux variables principales x, y et z. Par substitution, on obtient :

$$\begin{cases} x = 2 - 2y + z \\ y = 1 + \frac{1}{7}z \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y + z \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

■ **La solutions du système (S) (01pts)** L'unique solution du système est :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fin du corrigé