

Corrigé de l'exercice1(10pts) I- On a le système suivant :

$$(S) \begin{cases} 3x + 4y - 5z = 3 \\ x + y - z = 5 \\ 4x + 6y - 7z = 7 \end{cases}$$

1. La matrice des coefficients A et la matrice augmentée \tilde{A} (0.5pts)

$$\blacksquare A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \blacksquare \tilde{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & -7 & 7 \end{array} \right)$$

2. Ecriture matricielle de (S) (0.5pts)

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a l'écriture matricielle : $(S) \Leftrightarrow AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

II- La méthode de la matrice inverse (06pts)

3. Calcul de l'inverse A^{-1} par Gauss-Jordan (04pts) On a :

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4/3 & -5/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-4)L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4/3 & -5/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & -4/3 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow (-3)L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4/3 & -5/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & -4/3 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + (-4/3)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-2/3)L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + (-1)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + (2)L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) = (I_3|A^{-1})$$

Par conséquent : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Résolution du système (S) par la méthode de la matrice inverse (02pts)

A est inversible, alors l'équation $AX = b$ admet une seule solution donnée par : $X = A^{-1}b$. (0.5pts)

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 \\ L_2 \times C_1 \\ L_3 \times C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}. \quad (01.5pts)$$

$\blacksquare L_1 \times C_1 = (1 \quad 2 \quad -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (1)(3) + (2)(5) + (-1)(7) = 3 + 10 - 7 = 6.$

$\blacksquare L_2 \times C_1 = (-3 \quad 1 \quad 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (-3)(3) + (1)(5) + (2)(7) = -9 + 5 + 14 = 10.$

$\blacksquare L_3 \times C_1 = (-2 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (-2)(3) + (2)(5) + (1)(7) = -6 + 10 + 7 = 11.$

IV- La méthode de Cramer (03.5pts)

5. Vérification que le système est de Cramer (0.5pts)

Le système (S) est de Cramer car sa matrice des coefficients A est inversible.

6. Résolution du système (S) par la méthode de Cramer (03pts)

Comme le système est de Cramer, il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer : (0.5pts)

$$\blacksquare x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & -7 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-6}{-1} = 6 \quad \blacksquare y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -7 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-10}{-1} = 10 \quad \blacksquare z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 11.$$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

$$\blacksquare |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -7 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (3)(1)(-7) + (4)(-1)(4) + (-5)(1)(6) - (-5)(1)(4) - (3)(-1)(6) - (4)(1)(-7) \\ = -21 - 16 - 30 + 20 + 18 + 28 = -1. \quad (0.5pts)$$

$$\blacksquare |A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & -7 & 7 & 6 \end{vmatrix} = (3)(1)(-7) + (4)(-1)(7) + (-5)(5)(6) - (-5)(1)(7) - (3)(-1)(6) - (4)(5)(-7) \\ = -21 - 28 - 150 + 35 + 18 + 140 = -6. \quad (0.5pts)$$

$$\blacksquare |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & -7 & 4 & 7 \end{vmatrix} = (3)(5)(-7) + (3)(-1)(4) + (-5)(1)(7) - (-5)(5)(4) - (3)(-1)(7) - (3)(1)(-7) \\ = -105 - 12 - 35 + 100 + 21 + 21 = -10. \quad (0.5pts)$$

$$\blacksquare |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (3)(1)(7) + (4)(5)(4) + (3)(1)(6) - (3)(1)(4) - (3)(5)(6) - (4)(1)(7) \\ = 21 + 80 + 18 - 12 - 90 - 28 = -11. \quad (0.5pts)$$

Enfinement : $\bar{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$. (0.5pts)

Corrigé De L'Exercice2(05pts) Résolution du système (S) par Gauss.

$$(S) \begin{cases} x + 3y + z + t = -1 \\ 2x + 6y + z = -1 \\ x + 3y + 2z + 3t = -2 \end{cases}$$

■ **L'échelonnement de la matrice augmentée (01.5pts)**

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow (-1)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_1 \end{array} = \tilde{A}_e.$$

■ **Le système (S_e) associé à la matrice \tilde{A}_e (0.5pts)**

$$(S_e) \begin{cases} x + 3y + z + t = -1 \\ z + 2t = -1 \end{cases}$$

Ainsi (S) admet une infinité de solutions (Dans (S_e) : nombre d'équations < nombre de variables).

■ La résolution de (S_e) (01pts)

Le système échelonné (S_e) se résout par rapport aux variables principales x et z ; les variables y et t étant libres, on obtient par substitution :

$$\begin{cases} x = -1 - 3y - z - t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

■ Les solutions du système (S) (02pts)

En attribuant des valeurs arbitraires aux variables libres du système (S_e) , à savoir $t = \alpha$ et $y = \beta$, les solutions du système (S) sont données par :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta + \alpha \\ \beta \\ -1 - 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Corrigé De L'Exercice3 (05pts) On a les deux matrices suivantes :

$$\blacksquare A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \blacksquare B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5/2 \\ -1 & 5 & -13/2 \\ -1 & 4 & -11/2 \end{pmatrix}$$

1. Calcul de $2I_3 - 3A + 2B$ (01pts)

$$\begin{aligned} 2I_3 - 3A + 2B &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5/2 \\ -1 & 5 & -13/2 \\ -1 & 4 & -11/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ -6 & -15 & 15 \\ -6 & -12 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -2 & 10 & -13 \\ -2 & 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 2 \\ -8 & -3 & 2 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Le Déterminant (01pts) En développant suivant la deuxième colonne, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = (-2)A_{12} + (5)A_{22} + (4)A_{32},$$

où $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ désigne le cofacteur de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Ainsi :

$$\blacksquare A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2 \quad \blacksquare A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10 \quad \blacksquare A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -13.$$

Donc, $\det A = (-2)(-2) + (5)(10) + (4)(-13) = 4 + 50 - 52 = 2$.

3. Calcul de $A \times B$ (01.5pts)

$$A \times B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5/2 \\ -1 & 5 & -13/2 \\ -1 & 4 & -11/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 \\ L_3 \times C_1 & L_3 \times C_2 & L_3 \times C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Où L_i désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et C_j désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de B . Ainsi, on a :

Les éléments de la première ligne

$$\blacksquare L_1 \times C_1 = (-3 \quad -2 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-3)(0) + (-2)(-1) + (1)(-1) = 0 + 2 - 1 = 1.$$

$$\blacksquare L_1 \times C_2 = (-3 \quad -2 \quad 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (-3)(-2) + (-2)(5) + (1)(4) = 6 - 10 + 4 = \mathbf{0}.$$

$$\blacksquare L_1 \times C_3 = (-3 \quad -2 \quad 1) \begin{pmatrix} 5/2 \\ -13/2 \\ -11/2 \end{pmatrix} = (-3)(5/2) + (-2)(-13/2) + (1)(-11/2) = -\frac{15}{2} + 13 - \frac{11}{2} = \mathbf{0}.$$

Les éléments de la deuxième ligne

$$\blacksquare L_2 \times C_1 = (2 \quad 5 \quad -5) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2)(0) + (5)(-1) + (-5)(-1) = 0 - 5 + 5 = \mathbf{0}.$$

$$\blacksquare L_2 \times C_2 = (2 \quad 5 \quad -5) \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (-2)(-2) + (5)(5) + (-5)(4) = -4 + 25 - 20 = \mathbf{1}.$$

$$\blacksquare L_2 \times C_3 = (2 \quad 5 \quad -5) \begin{pmatrix} 5/2 \\ -13/2 \\ -11/2 \end{pmatrix} = (2)(5/2) + (5)(-13/2) + (-5)(-11/2) = \frac{10}{2} - \frac{65}{2} + \frac{55}{2} = \mathbf{0}.$$

Les éléments de la troisième ligne

$$\blacksquare L_3 \times C_1 = (2 \quad 4 \quad -4) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2)(0) + (4)(-1) + (-4)(-1) = 0 - 4 + 4 = \mathbf{0}.$$

$$\blacksquare L_3 \times C_2 = (2 \quad 4 \quad -4) \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (2)(-2) + (4)(5) + (-4)(4) = -4 + 20 - 16 = \mathbf{0}.$$

$$\blacksquare L_3 \times C_3 = (2 \quad 4 \quad -4) \begin{pmatrix} 5/2 \\ -13/2 \\ -11/2 \end{pmatrix} = (2)(5/2) + (4)(-13/2) + (-4)(-11/2) = 5 - 26 + 22 = \mathbf{1}.$$

Donc, $A \times B = I_3$.

4. Ce que représente B pour A (0.5pts)

Comme $A \times B = I_3$, alors B est la matrice inverse de A. En d'autre terme : $B = A^{-1}$.

5. La matrice X (01pts)

On a : $XA = 2A - 3A^2 + 2I_3$, A inversible et son inverse $A^{-1} = B$. Donc :

$$X = (2A - 3A^2 + 2I_3) \times A^{-1} = 2(A \times A^{-1}) - 3(A^2 \times A^{-1}) + 2(I_3 \times A^{-1}) = 2I_3 - 3A + 2B.$$

Et d'après la première question, on déduit : $X = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 2 \\ -8 & -3 & 2 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Fin du corrigé