



Université A/MIRA de Béjaia

Faculté des sciences exactes

Département de mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Appliquées

Polycopié pédagogique

Dossier numéro :

Titre :

Analyse 3 :

Sur les suites et les séries

Rédigé par : **TABTI Hadjila**

Cours destiné aux étudiants de : **2^{ème} année licence STID**

Année : 2024-2025.

Préface

Ce polycopié de cours présente les notions fondamentales des suites et séries numériques, ainsi que des suites et séries de fonctions. Il est le fruit de mon expérience d'enseignement au sein du département de Mathématiques et du département des Sciences et Techniques (ST).

Ce support s'appuie principalement sur les cours d'Analyse 3 dispensés en deuxième année de la spécialité Statistiques et Traitement Informatique des Données (STID), ainsi que sur les travaux dirigés d'Analyse 1 en première année de la licence Mathématiques et Informatique (MI), et les travaux dirigés de Math 3 en deuxième année de la filière Sciences et Techniques (ST).

J'ai eu le privilège d'enseigner ces modules, et je rapporte ici fidèlement le contenu des chapitres et des séances de travaux dirigés que j'ai assurés.

Les suites et les séries jouent un rôle fondamental en analyse mathématique et sont constamment utilisées en calcul des probabilités. Étroitement liées à la notion de convergence, les suites et séries numériques sont au cœur de la construction de nombreux objets mathématiques.

Par ailleurs, plusieurs fonctions fondamentales peuvent être obtenues comme limites de suites de fonctions ou comme sommes de séries de fonctions. L'étude de la continuité et de la dérivabilité de ces fonctions mène naturellement à la notion essentielle de convergence uniforme.

Ce polycopié propose un cours détaillé sur les séries entières et les séries de Fourier, qui constituent respectivement les fondements de l'analyse complexe et de l'analyse de Fourier. Le

contenu est rédigé de manière à être facilement accessible et assimilable par les étudiants.

De nombreux exemples, contre-exemples et exercices sont présentés de façon progressive et détaillée, afin de permettre une compréhension approfondie des nouvelles notions abordées.

Le premier chapitre porte sur les suites numériques. Il traite une partie essentielle du programme de L1, à savoir les suites numériques réelles et complexes. Cette section constitue une révision approfondie, visant à combler les lacunes fréquemment observées chez les étudiants.

Dans le deuxième chapitre, après avoir posé les définitions fondamentales, nous abordons d'abord les séries numériques à termes positifs, puis nous détaillons les principaux critères de convergence dans le cas général, notamment le critère de Leibniz pour les séries alternées et le critère d'Abel pour les séries semi-convergentes.

Le troisième chapitre, intitulé Suites et séries de fonctions, est consacré à la présentation des notions de base ainsi qu'à l'introduction des théorèmes fondamentaux relatifs aux différents types de convergence des suites et séries de fonctions.

Enfin, le quatrième et dernier chapitre est dédié à l'étude de deux familles particulières de séries de fonctions : les séries entières et les séries de Fourier. Nous y appliquons les résultats du chapitre précédent à ces séries particulières, qui présentent des propriétés remarquables de convergence.

Table des matières

1 Suites numériques réelles et complexes	6
1.1 Généralités sur les suites numériques	6
1.2 Limite d'une suite numérique réelle ou complexe et ses propriétés	7
1.3 Critères de convergence pour les suites réelles ou complexes	12
1.3.1 Critères de convergence d'une suite de Cauchy	13
1.4 Suites réelles	15
1.4.1 La monotonie	15
1.4.2 Critère de convergence pour les suites réelles	16
1.5 Exercices	20
2 Séries numériques	22
2.1 Généralités sur les séries numériques	22
2.1.1 Quelques exemples de base de séries numériques	22
2.1.2 Convergence	23
2.1.3 Critères de convergence	25
2.2 Série de terme général positif	27
2.2.1 Critères de Convergence	27
2.3 Séries à termes réels, de signe quelconque, ou à termes complexes	31

2.3.1	Critères de convergence	32
2.4	Séries alternées	34
2.5	Exercices	36
3	Suites et séries de fonctions	37
3.1	Suites de fonctions	37
3.2	Définitions	37
3.3	Critère de Cauchy pour la convergence uniforme	39
3.4	Théorèmes fondamentaux sur les suites uniformément convergentes	40
3.4.1	Continuité	40
3.4.2	Intégration	41
3.4.3	Dérivabilité	42
3.5	Séries de fonctions	44
3.5.1	Définition et propriétés élémentaires	44
3.5.2	Critère de cauchy pour la convergence uniforme	45
3.6	Convergence normale d'une série de fonctions	45
3.7	Propriétés de la somme d'une série de fonctions liées à la convergence uniforme	46
3.7.1	Continuité	46
3.7.2	Intégration	49
3.7.3	Dérivation	49
3.8	Exercices	51
4	Séries entières	53
4.1	Définitions et convergence	53
4.1.1	Convergence d'une série entière	53

4.1.2	Détermination du rayon de convergence	55
4.2	Opérations sur les séries entières	56
4.2.1	Structures algébriques	56
4.2.2	Séries entières dérivée et primitives	58
4.3	Propriétés de la somme d'une série entière	58
4.3.1	Continuité de la somme d'une série entière	58
4.3.2	Intégration de la fonction somme	59
4.4	Développement de fonctions en séries entières	60
4.5	Développements usuels	63
4.5.1	Développements en série entière complexe	63
4.5.2	Développements en série entière réelle	63
4.6	Exercices	64
5	Séries de Fourier	65
5.1	Séries trigonométriques et séries de Fourier	65
5.2	Convergence d'une série trigonométrique	66
5.2.1	Coefficients de Fourier	67
5.2.2	Convergence	69
5.3	Exercices	71

Suites numériques réelles et complexes ¹

1.1 Généralités sur les suites numériques

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne l'un des deux corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1.1. Soit E un ensemble non vide. On appelle suite numérique de terme général u_n toute application :

$$\begin{aligned} u : A \subseteq \mathbb{N} &\longrightarrow E \\ n &\longmapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

Lorsque E est une partie de \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}), on dit que la suite est réelle (resp. complexe).

On note une telle suite numérique par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplement $(u_n)_n$, ou encore (u_n) .

Exemples 1.1. 1. La suite $(u_n)_n$ de terme général

$$u_n = 1 + \frac{n+1}{n^2}i, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

est une suite de nombres complexes.

2. La suite $(v_n)_n$ de terme général

$$v_n = n^2 \cos n, \quad n \in \mathbb{N},$$

est une suite de nombres réels.

Définition 1.2. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On appelle sous-suite ou suite extraite de $(u_n)_n$ toute suite $(u_{\phi(n)})$, où ϕ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Définition 1.3. Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est dite **majorée** si

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq A.$$

Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est dite **minorée** si

$$\exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq B.$$

Définition 1.4. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Remarque 1.1. La notion de suite bornée s'étend naturellement au cas des suites à valeurs complexes, en remplaçant la valeur absolue par le module :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

1.2 Limite d'une suite numérique réelle ou complexe et ses propriétés

Définition 1.5. Soient $(u_n)_n$ une suite numérique et l un nombre réel ou complexe. On dit que $(u_n)_n$ admet l pour limite si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n \geq N(\varepsilon) \implies |u_n - l| \leq \varepsilon,$$

et on écrit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exemple 1.1. Montrons que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{3n} + 1, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

converge vers $l = 1$.

On doit déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait

$$|u_n - l| = \left| \frac{1}{3n} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$$|u_n - 1| = \left| \frac{1}{3n} \right| \leq \frac{1}{3n} \leq \varepsilon.$$

Cela donne

$$n \geq \frac{1}{3\varepsilon}.$$

Il suffit donc de choisir

$$N = \left\lceil \frac{1}{3\varepsilon} \right\rceil,$$

où $\lceil \cdot \rceil$ est la fonction partie entière, pour avoir

$$|u_n - 1| = \left| \frac{1}{3n} \right| \leq \frac{1}{3n} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Définition 1.6. Une suite numérique est dite convergente si elle admet une limite finie l . Dans le cas contraire, la suite $(u_n)_n$ est dite divergente.

Pour exprimer le fait que $(u_n)_n$ converge vers l , on dit que l est la limite de $(u_n)_n$ lorsque n tend vers $+\infty$, et on note

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{ou} \quad u_n \longrightarrow l, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Proposition 1.1. Soit $(z_n)_n$ une suite complexe. Alors $(z_n)_n$ converge vers une limite complexe l si et seulement si les suites réelles $\mathcal{R}e(z_n)$ et $\mathcal{I}m(z_n)$ convergent respectivement vers $\mathcal{R}e(l)$ et $\mathcal{I}m(l)$.

Démonstration 1.1. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, alors

$$\max(|a|, |b|) \leq |z| \leq |a| + |b|. \quad (1.1)$$

On pose $a_n = \mathcal{R}e(z_n)$ et $b_n = \mathcal{I}m(z_n)$, alors $\mathcal{R}e(z_n - l) = a_n - \mathcal{R}e(l)$ et $\mathcal{I}m(z_n - l) = b_n - \mathcal{I}m(l)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Si $|z_n - l| \leq \varepsilon$, alors, par l'inégalité de gauche de (1.1), il en est de même pour $|a_n - \mathcal{R}e(l)|$ et pour $|b_n - \mathcal{I}m(l)|$.

Réciproquement, si $|a_n - \mathcal{R}e(l)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|b_n - \mathcal{I}m(l)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors, par l'inégalité de droite de (1.1), $|z_n - l| \leq \varepsilon$.

D'où le résultat.

Remarque 1.2. Le résultat précédent permet de ramener l'étude d'une suite complexe à celle de deux suites réelles.

Théorème 1.1. (Unicité de la limite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Si la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe, alors elle est unique.

Démonstration 1.2. Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers les deux limites l_1 et l_2 .

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$, on ait :

$$|u_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et il existe un rang n_2 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_2$, on ait :

$$|u_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Ainsi,

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, $|l_1 - l_2| \leq \varepsilon$. Ce qui entraîne que $|l_1 - l_2| = 0$, ou encore $l_1 = l_2$.

Propriétés 1.1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans \mathbb{K} , convergentes respectivement vers les limites l et l' . Soit λ un nombre complexe. Alors on a :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l',$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = ll',$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda v_n) = \lambda l',$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|,$$

5. Si de plus $l' \neq 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{l}{l'}.$$

Proposition 1.2. Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Démonstration 1.3. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente, de limite l . D'après la définition de la limite, et pour ε fixé, il existe un entier n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, on ait

$$|u_n - l| \leq \varepsilon,$$

d'où, pour tout $n \geq n_1$,

$$|u_n| = |l + (u_n - l)| \leq |l| + \varepsilon.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \max(|l| + \varepsilon, |u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_1-1}|).$$

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est bornée.

Pour voir que la réciproque est fausse, il suffit de considérer la suite $(u_n)_n$ donnée par son terme général

$$u_n = (-1)^n,$$

qui est bornée mais divergente.

Proposition 1.3. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $(v_n)_n$ est bornée. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 0.$$

Démonstration 1.4. Soit $M > 0$ fixé tel que, pour tout entier n , on ait $|v_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $(u_n)_n$ tend vers 0, en appliquant la définition de la limite et en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{M}$, on a :

Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Il en résulte que, pour tout $n \geq N$,

on a

$$|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Exemple 1.2. Pour calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n^2 + 1)}{n^5 + 4n},$$

on pose

$$u_n = \frac{1}{n^5 + 4n} \quad \text{et} \quad v_n = \cos(n^2 + 1).$$

On sait que

$$\cos(n^2 + 1) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^5 + 4n} = 0.$$

La proposition précédente nous permet de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n^2 + 1)}{n^5 + 4n} = 0.$$

1.3 Critères de convergence pour les suites réelles ou complexes

Proposition 1.4. *De toute suite numérique $(u_n)_n$ convergente vers la limite l , on peut extraire une sous-suite convergente qui a pour limite l .*

Démonstration 1.5. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Pour tout $n \geq N$, on a $\phi(n) \geq n \geq N$. Par conséquent, $|u_{\phi(n)} - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.*

Remarque 1.3. *Cette proposition donne des critères de divergence :*

1. *Si on peut extraire de $(u_n)_n$ une suite divergente, alors $(u_n)_n$ diverge.*
2. *Si on peut extraire de $(u_n)_n$ deux suites convergeant vers des limites différentes, alors $(u_n)_n$ diverge.*

Par exemple, la suite $u_n = (-1)^{3n}$ diverge, car la suite des termes pairs converge vers 1, et la suite des termes impairs converge vers -1 .

Définition 1.7. Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une suite numérique (a_n) convergente vers 1 et vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

On écrit $u_n \sim v_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Théorème 1.2. (Critère d'équivalence)

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites numériques équivalentes, alors elles sont de même nature.

Démonstration 1.6. *Évident.*

Théorème 1.3. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels.

1. Si $(u_n)_n$ est croissante et majorée, alors elle a une limite finie, et de plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup u_n.$$

2. Si $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, alors elle a une limite finie, et de plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf u_n.$$

Définition 1.8. On dit qu'un nombre l est une valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_n$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ qui converge vers l .

Théorème 1.4. (*Bolzano-Weierstrass*)

Toute suite bornée dans \mathbb{K} possède au moins une valeur d'adhérence.

1.3.1 Critères de convergence d'une suite de Cauchy

Définition 1.9. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ (réelle ou complexe) est une suite de Cauchy si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N \implies |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

Lemme 1.1. Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration 1.7. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers l (une limite réelle ou complexe). Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait

$$|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors, pour $p, q \geq N$, nous avons

$$|u_p - u_q| = |(u_p - l) - (u_q - l)| = |u_p - l| + |u_q - l| \leq \varepsilon.$$

Donc, $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Lemme 1.2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration 1.8. *Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. D'après la définition, en fixant $\varepsilon = 1$, on trouve qu'il existe un entier N tel que, pour tout $p, q \geq N$, on ait*

$$|u_p - u_q| \leq 1.$$

En prenant $q = N$, on trouve que, pour tout $p \geq N$, on a

$$|u_p| = |u_N + (u_p - u_N)| \leq |u_N| + 1.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| = \max(|u_N| + 1, |u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|).$$

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est bornée.

Lemme 1.3. *Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.*

Démonstration 1.9. *Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence l . Montrons que $(u_n)_n$ converge vers l . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, on ait*

$$|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, on peut choisir une suite $(u_{\phi(n)})$ extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers l . Il existe donc un entier M tel que, pour tout $\phi(n) \geq M$, on ait

$$|u_{\phi(n)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme la suite ϕ est strictement croissante, on sait que $\phi(n) \geq n$ pour tout n . Ainsi, pour $n \geq \max(M, N)$, nous avons simultanément $\phi(n) \geq n \geq N$ et $n \geq M$. D'où

$$|u_n - l| = |u_n - u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)} - l| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ converge vers l .

Théorème 1.5. Une suite numérique (réelle ou complexe) converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Démonstration 1.10. On a montré que toute suite convergente est de Cauchy. Réciproquement, soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. Montrons qu'elle converge dans \mathbb{K} . La suite $(u_n)_n$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(u_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence dans \mathbb{K} . On en déduit que $(u_n)_n$ converge (vers cette valeur).

Ainsi, pour montrer la convergence d'une suite (réelle ou complexe), il suffit de vérifier que celle-ci est de Cauchy.

1.4 Suites réelles

1.4.1 La monotonie

Définition 1.10. Une suite $(u_n)_n$ est dite croissante (resp. décroissante) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} \leq u_n).$$

Une suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Si les inégalités précédentes sont strictes, la suite $(u_n)_n$ est dite strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Exemple 1.3. La suite $(u_n)_n$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

est strictement croissante. En effet,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.4.2 Critère de convergence pour les suites réelles

Théorème 1.6. (*Critère des suites monotones*)

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels.

1. Si $(u_n)_n$ est croissante et majorée, alors elle a une limite (finie) et de plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup u_n.$$

2. Si $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, alors elle a une limite (finie) et de plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf u_n.$$

Exemple 1.4. Soit la suite $(w_n)_n$ de terme général

$$w_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Tous les termes du produit sont strictement positifs, donc $w_n > 0$ pour tout $n \geq 0$. Par ailleurs,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 - \frac{1}{2n+3}\right) < 1.$$

Donc la suite $(w_n)_n$ est décroissante. Comme de plus elle est minorée par 0, elle est convergente d'après le critère des suites monotones.

Théorème 1.7. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes telles que pour tout

$$n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Alors

$$\lim u_n \leq \lim v_n.$$

Théorème 1.8. (*Théorème des Gendarmes*)

Soient (u_n) , (a_n) et (b_n) trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, on ait

$$b_n \leq u_n \leq a_n.$$

- Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et de même limite l , alors $(u_n)_n$ est convergente et sa limite est égale à l .

Démonstration 1.11. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq a_n - u_n \leq a_n - b_n.$$

Comme (b_n) et (a_n) convergent vers une même limite, la suite $(a_n - b_n)$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait

$$0 \leq a_n - u_n \leq a_n - b_n \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que $(a_n - b_n)$ tend vers 0. Comme (a_n) converge vers l , on en déduit que

$$u_n = a_n - (a_n - u_n)$$

converge vers l .

Exemple 1.5. On considère la suite $(u_n)_n$ de terme général

$$u_n = \frac{\sin n}{n}.$$

On a

$$|\sin n| \leq 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ce qui entraîne que

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}.$$

La suite (a_n) de terme général

$$a_n = \frac{1}{n}$$

a pour limite

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{ qui tend vers } 0.$$

Il en est de même pour la suite de terme général

$$b_n = \frac{-1}{n}.$$

Le théorème d'encadrement des Gendarmes permet de conclure que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

Théorème 1.9. (Suites adjacentes)

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que :

1. $(u_n)_n$ est croissante.
2. $(v_n)_n$ est décroissante.
3. $(v_n - u_n)_n$ converge vers 0.

Alors $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.

Démonstration 1.12. *On remarque que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et converge vers 0.*

Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

Ainsi, $(u_n)_n$ est croissante et majorée par v_0 , donc elle converge vers une limite finie l . De même, $(v_n)_n$ est décroissante et minorée par u_0 , donc elle converge. Ainsi, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, et elles ont la même limite l puisque $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

1.5 Exercices

Exercice 1.1. *En utilisant la définition, montrer que :*

1. *La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.*
2. *La suite de terme général $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 2.*
3. *La suite de terme général $w_n = \frac{n^2}{n^4+1}$ converge vers 0.*

Exercice 1.2. *Étudier la nature des suites suivantes :*

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{k}{k+1}\right), \quad w_n = \sum_{k=0}^n \exp(-k),$$

en précisant leur comportement pour $n \rightarrow \infty$.

Exercice 1.3. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par :*

$$u_n = \sum_{k=0}^n 1 + \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. *Montrer que ces suites convergent vers une même limite l .*
2. *Montrer que $l \notin \mathbb{Q}$.*

Exercice 1.4. *Étudier la nature des suites suivantes :*

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}, \quad v_n = \frac{\cos(n^2)+1}{n^2+4n+2}, \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

en précisant leur limite si elle existe.

Exercice 1.5. *Soit la suite de nombres complexes $(u_n)_n$ définie par $u_0 = \alpha$ et la relation de récurrence :*

$$u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}.$$

1. Déterminer la suite $(\Im u_n)_n$ et calculer sa limite.
2. Montrer que les suites $(|u_n|)_n$ et $(\Re u_n)_n$ sont monotones.
3. En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et que sa limite est un nombre réel.

2.1 Généralités sur les séries numériques

Définition 2.1. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle (ou complexe). La somme formelle

$$\sum_{n \geq 0} u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

est dite une série de terme général u_n . On note aussi la série de terme général u_n par

$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

ou, tout simplement,

$$\sum u_n.$$

2.1.1 Quelques exemples de base de séries numériques

1. **La série géométrique** : c'est la série de terme général

$$u_n = aq^n, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

où q est la raison de la suite $(u_n)_n$. Elle est notée par

$$\sum_{n \geq 0} aq^n.$$

2. **La série harmonique** : c'est la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

On la note par

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}.$$

3. **La série de Riemann** : c'est la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On la note par

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Définition 2.2. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La suite $(S_n)_n$ est appelée la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

2.1.2 Convergence

Définition 2.3. Une série de terme général u_n est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est convergente. La limite de la suite $(S_n)_n$, notée S , est appelée somme de la série $\sum u_n$, et on note :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Définition 2.4. Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.

Définition 2.5. Une série de terme général u_n est dite divergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ diverge.

Exemple 2.1. La série géométrique

$$\sum a^n, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

converge si $|a| < 1$. En effet, soit sa suite des sommes partielles (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n a^k.$$

On a

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}, \quad |a| < 1.$$

Exemple 2.2. Soit la série de terme général

$$u_n = \log \left(\frac{n+1}{n} \right), \quad n \geq 1,$$

cette série diverge car

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k \geq 1} u_k = \log \left(\frac{n+1}{n} \right) = \sum_{k \geq 1} \log(k+1) - \log(k) \\ &= (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \cdots + (\log n - \log(n-1)) \\ &= \log n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log n = +\infty.$$

Comme la suite des sommes partielles (S_n) diverge, la série $\sum u_n$ est également divergente.

Remarque 2.1. La série de terme général complexe $\sum \mathcal{R}(u_n) + \mathcal{I}(u_n)$ converge si et seulement si les deux séries $\sum \mathcal{R}(u_n)$ et $\sum \mathcal{I}(u_n)$ convergent.

Définition 2.6. La série

$$\sum_{n \geq m+1} u_n$$

est appelée le reste d'ordre m de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Théorème 2.1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques.

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , la série

$$\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$$

converge aussi.

Démonstration 2.1. Soient (S_n) et (S'_n) les suites des sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ respectivement, avec des sommes S et S' . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\lambda S_n + \mu S'_n] = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \lambda S + \mu S' = S'' \quad (\text{fini}).$$

Ainsi, la série $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$ converge.

Corollaire 2.2. 1. Si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ diverge et l'autre converge, alors

$$\sum (u_n + v_n) \text{ diverge.}$$

2. Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes, on ne peut rien conclure.

2.1.3 Critères de convergence

Proposition 2.1. (*Condition nécessaire de la convergence (CNC)*)

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ tend vers zéro.

$$\left(\sum_{n \geq 0}^{\infty} u_n = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \right).$$

Remarque 2.2. La contraposée de ce résultat est souvent utilisée : une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ne peut pas converger.

Démonstration 2.2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Comme $\sum u_n$ converge, la suite (S_n) est convergente vers la somme S de la série. Il en est de même pour la suite $(S_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$. Ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Remarque 2.3. ATTENTION La condition $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ est nécessaire pour la convergence de la série $\sum u_n$, mais elle n'est pas suffisante.

En effet, prenons l'exemple suivant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0,$$

ce qui montre que la suite (u_n) converge vers zéro. Cependant, la série $\sum_{n \geq 1} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ diverge.

Pour le montrer, on peut écrire la somme partielle :

$$\sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log(k)) = \log(n+1).$$

Ainsi, la somme partielle $\log(n+1)$ diverge lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui prouve que la série diverge.

Proposition 2.2. (Critère de Cauchy)

La série de terme général u_n converge si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration 2.3. La suite des sommes partielles (S_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k.$$

2.2 Série de terme général positif

Définition 2.7. Une série $\sum u_n$ est dite une série de terme général positif si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.3. Une série de terme général positif u_n est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée, c'est-à-dire, il existe un réel A tel que pour tout entier n on ait :

$$\sum_{k=0}^n u_k \leq A.$$

2.2.1 Critères de Convergence

1. Critère de comparaison

Théorème 2.4. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe $n_0 > 0$ tel que pour tout $n > n_0$, on ait

$$u_n \leq v_n.$$

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration 2.4. On note, pour tout $n \geq n_0$,

$$S_n = u_{n_0} + \cdots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = v_{n_0} + \cdots + v_n.$$

Les suites $(S_n)_{n > n_0}$ et $(T_n)_{n > n_0}$ sont croissantes, et de plus, pour tout $n > n_0$, on a

$$S_n \leq T_n.$$

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la suite (T_n) converge vers une limite T . La suite (S_n) est croissante et majorée par T , donc elle converge, et par conséquent, la série $\sum u_n$ converge

aussi.

Inversement, si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite (S_n) tend vers $+\infty$, et il en est de même pour la suite (T_n) .

2. Critère de comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

Théorème 2.5. Soit $\sum u_n$ une série de terme général positif. Si $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors :

(a) La série $\sum u_n$ est convergente si $\alpha > 1$.

(b) La série $\sum u_n$ est divergente si $\alpha \leq 1$.

Exemple 2.3. La série $\sum \frac{1}{2n^4+n+3}$ est convergente. En effet, on a l'inégalité suivante pour n suffisamment grand :

$$\frac{1}{2n^4 + n + 3} < \frac{1}{2n^4}.$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n^4}$ est convergente. Par le critère de comparaison, la série $\sum \frac{1}{2n^4+n+3}$ converge également.

3. Critère d'équivalence

Théorème 2.6. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Alors,

– Les séries sont de même nature, c'est-à-dire, elles convergent ou divergent toutes les deux.

Démonstration 2.5. On a

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, 0 < (1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n.$$

Cela entraîne

$$\sum (1-\varepsilon)v_n \leq \sum u_n \leq \sum (1+\varepsilon)v_n, \quad \forall n \geq N.$$

Il suffit d'appliquer la règle de comparaison pour montrer que les séries sont de même nature.

En effet, si $\sum v_n$ converge, alors $(1+\varepsilon)\sum v_n$ converge aussi, et d'après la règle de comparaison, $\sum u_n$ converge.

Si $\sum v_n$ diverge, il en est de même pour $(1-\varepsilon)\sum v_n$, ce qui entraîne la divergence de $\sum u_n$.

Exemple 2.4. La série $\sum \frac{1}{4n^4+1}$ est convergente. En effet, on a :

- $\frac{1}{4n^4+1} > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- Et $\frac{1}{4n^4+1} \sim \frac{1}{4n^4}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

D'après le **critère d'équivalence**, la série $\sum \frac{1}{4n^4+1}$ et la série $\sum \frac{1}{4n^4}$ sont de même nature.

Or, $\sum \frac{1}{4n^4}$ est une série de Riemann convergente, car il s'agit d'une série de la forme $\sum \frac{1}{n^p}$ avec $p = 4 > 1$, ce qui garantit la convergence de la série.

Ainsi, par le critère d'équivalence, on conclut que la série $\sum \frac{1}{4n^4+1}$ est également convergente.

4. Règles de Cauchy et de d'Alembert

Théorème 2.7. (Règle de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série de terme général positif et soit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ (éventuellement infini).

Alors,

(a) Si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

(b) Si $L > 1$, la série diverge.

(Si $L = 1$, on ne peut rien conclure.)

Démonstration 2.6. (a) Supposons $L < 1$ et soit a tel que $L < a < 1$. Il n'existe qu'un

nombre fini d'entiers n tels que $\sqrt[n]{u_n} > a$. On peut donc trouver un entier N (dépendant de a) tel que pour $n \geq N$, on ait $\sqrt[n]{u_n} \leq a$. À partir de ce rang N , on a alors $u_n < a^n$.

Par comparaison avec la série géométrique $\sum a^n$ qui est convergente, on conclut que $\sum u_n$ converge.

(b) Si $L > 1$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\sqrt[n]{u_n} > 1$, ce qui implique que $u_n > 1$.

Le terme général de la série ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 2.5. Soit la série de terme général $u_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^2}$.

On commence par examiner $\sqrt[n]{u_n}$ pour $n \geq 1$:

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n \log\left(1 - \frac{a}{n}\right)\right).$$

Pour n suffisamment grand, on peut utiliser le développement de $\log\left(1 - \frac{a}{n}\right)$ autour de 0 :

$$\log\left(1 - \frac{a}{n}\right) = -\frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, on obtient :

$$\sqrt[n]{u_n} = \exp\left(n\left(-\frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-a + o(1)).$$

En prenant la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \exp(-a).$$

Puisque $\exp(-a) < 1$, il en découle que la série $\sum u_n$ est convergente d'après le critère de Cauchy.

Théorème 2.8. (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série de terme général positif. On note

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Alors,

(a) Si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

(b) Si $L > 1$, la série diverge.

(Si $L = 1$, on ne peut rien conclure.)

Démonstration 2.7. La démonstration est analogue à celle de la règle de Cauchy, en remplaçant $\sqrt[n]{u_n}$ par $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple 2.6. Soit la série de terme général positif $u_n = \frac{\exp(-n)}{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

On souhaite utiliser le critère de d'Alembert pour étudier la convergence de cette série. Calculons :

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \exp(-(n+1))}{(n+2) \exp(-n)}.$$

Cela donne :

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)} \exp(-1).$$

En simplifiant, on obtient :

$$L = \exp(-1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = \exp(-1) \cdot 1 = \exp(-1).$$

Or, $\exp(-1) < 1$, ce qui implique, d'après le critère de d'Alembert, que la série $\sum u_n$ est convergente.

Ainsi, la série $\sum u_n$ est convergente.

2.3 Séries à termes réels, de signe quelconque, ou à termes complexes

Définition 2.8. Une série numérique $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 2.9. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration 2.8. *Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la série $\sum |u_n|$ converge, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ et pour tout $m > N$, on ait :*

$$\left| \sum_{n+1}^{n+m} u_n \right| \leq \sum_{n+1}^{n+m} |u_n| < \varepsilon.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que la série satisfait au critère de Cauchy, et donc $\sum u_n$ converge.

Remarque 2.4. *La réciproque du théorème précédent est fausse.*

Définition 2.9. Une série numérique qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite semi-convergente.

2.3.1 Critères de convergence

1. **Critères de la convergence absolue** Les critères de la convergence absolue sont ceux des séries à termes positifs appliqués à $(|u_n|)$.

Exemple 2.7. Soit la série $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{\cos n}{n^2 + 1} \right|$.

On a l'inégalité suivante pour tous $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\cos n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{\cos n}{n^2 + 1} \right|$ est dominée par la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1}$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{\cos n}{n^2 + 1} \right| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Or, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1}$ est une série convergente (c'est une série de type $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$, qui est convergente).

Par le **critère de comparaison** avec une série convergente, on conclut que la série $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{\cos n}{n^2 + 1} \right|$ est également convergente.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{n^2 + 1}$ est absolument convergente.

2. Critère d'Abel

Théorème 2.10. (Critère d'Abel)

Soit $\sum u_n$ une série numérique telle que $u_n = a_n b_n$ pour tout entier $n > 0$. On suppose que :

- La suite (a_n) est une suite réelle ou complexe qui tend vers 0 en décroissant, c'est-à-dire $a_n \searrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Les suites (b_n) sont réelles ou complexes, et il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tous $n > 0$ et $m > n$, on ait

$$\left| \sum_{k=n}^m b_k \right| \leq M.$$

Alors, la série $\sum u_n$ converge et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|R_n| = \sum_{n+1}^{\infty} u_n \leq M a_{n+1}.$$

Démonstration 2.9. On vérifie pour $\sum u_n$ le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(a_n)_n$ tend vers 0, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, on ait $a_n \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Alors,

pour tous $m > n > N$, on a, d'après le lemme précédent (en modifiant les indices) :

$$\left| \sum_{n+1}^m u_k \right| = \left| \sum_{n+1}^m a_k b_k \right| \leq M a_{n+1} \leq \varepsilon.$$

D'où, le résultat du théorème.

2.4 Séries alternées

Définition 2.10. On appelle **série alternée** toute série de terme général $(-1)^n a_n$, où (a_n) est une suite réelle de signe constant.

Exemple 2.8. La série de terme général $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ est une série alternée.

Théorème 2.11. (Critère de Leibnitz)

Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ est convergente. De plus, sa somme S vérifie :

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \quad \text{pour tout } n,$$

et son reste R_n d'ordre n vérifie :

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Démonstration 2.10. On montre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En effet, puisque la suite (a_n) est décroissante, on a :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0, \quad \text{et} \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0.$$

De plus, $S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n}$ tend vers 0. Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et donc elles convergent et ont la même limite. La série $\sum (-1)^n a_n$ est donc convergente, et pour tout

n , on a :

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}.$$

On en déduit que :

$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1},$$

$$|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| \leq S_{2n+1} - S_{2n+2} = a_{2n+2}.$$

Donc, on a $|R_n| \leq a_{n+1}$ pour tout entier naturel n .

Exemple 2.9. La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente. En effet, soit (a_n) la suite de terme général $a_n = \frac{1}{n^2}$.

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_n) \text{ est une suite décroissante,} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0. \end{array} \right.$$

D'après le **critère de Leibniz** pour les séries alternées, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2.5 Exercices

Exercice 2.1. Étudier la nature des séries suivantes, en utilisant les suites des sommes partielles

S_n :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n \geq 1} \log \left(\frac{n}{n+1} \right), \quad \sum_{n \geq 0} \exp(-n).$$

Exercice 2.2. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\log^n(n+1)}, \quad \sum_{n \geq 1} \left(\frac{3n}{4n-1} \right)^{(2n+1)}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} n^2 \sin \left(\frac{\pi}{2^n} \right).$$

Exercice 2.3. Étudier la convergence des séries suivantes et préciser s'il s'agit de convergence absolue, semi-convergence ou divergence :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\alpha}{n^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n^\alpha}, \quad \alpha \geq 1, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}.$$

Exercice 2.4. Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \frac{n(2+i)^n}{2^n}, \quad n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n+i}}, \quad n \geq 1, \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{i}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

3

Suites et séries de fonctions

3.1 Suites de fonctions

On notera $\mathfrak{F}(E, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur une partie non vide $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{C} .

3.2 Définitions

Définition 3.1. Une suite de fonctions définies sur une partie E de \mathbb{R} est une application de \mathbb{N} dans l'ensemble des fonctions $\mathfrak{F}(E, \mathbb{C})$. Autrement dit, à chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on associe une fonction f_n . La suite est dite de terme général $f_n(x)$, et on la note (f_n) .

Exemple 3.1. Soit la suite de fonctions définie par :

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{x^2}{nx^2 + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La suite (f_n) est donc une suite de fonctions dont le terme général est :

$$f_n(x) = \frac{x^2}{nx^2 + 3}.$$

Définition 3.2. (Convergence simple)

Soit f une application de \mathbb{E} dans \mathbb{C} . On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers

f sur E si, pour chaque $x \in E$ fixé, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. En d'autres termes,

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : [n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon].$$

On dit alors que f est la **limite simple** sur E de la suite de fonctions (f_n) et on écrit :

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{ou} \quad f_n \rightarrow f, \quad n \rightarrow \infty.$$

Exemple 3.2. La suite des fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = x^n$$

converge simplement vers la fonction f définie par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1[; \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

On remarque que toutes les fonctions (f_n) sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$, alors que la fonction limite f n'est même pas continue!

Remarque 3.1. La limite d'une suite simplement convergente de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.

Définition 3.3 (Convergence uniforme d'une suite de fonctions). On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur E si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait

$$\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Proposition 3.1. *Si la suite (f_n) converge uniformément sur E vers f , alors elle converge simplement sur E vers f .*

Démonstration 3.1. *Cela découle immédiatement des définitions.*

Exemple 3.3. *Soit la suite de fonctions (f_n) définie par*

$$f_n(x) = \frac{1}{n \exp(nx^2)} + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n \exp(nx^2)} + x \right) = x.$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n \exp(nx^2)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

3.3 Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

Théorème 3.1. *Soit (f_n) une suite d'applications de l'ensemble E dans l'espace vectoriel normé F . Pour que la suite (f_n) soit uniformément convergente sur E , il faut et il suffit que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ et } p \geq N, \quad \forall x \in E : |f_n(x) - f_p(x)| \leq \epsilon.$$

Démonstration 3.2. *Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur E , alors*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Si $n \geq N$ et $p \geq N$, alors pour tout $x \in E$,

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Inversement, supposons que cette condition soit vérifiée. Pour chaque $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans \mathbb{C} , donc elle converge si E est complet. D'après les conditions du théorème, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$ et $p \geq N$,

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \epsilon.$$

En faisant tendre p vers ∞ , on obtient

$$\forall x \in E, \quad \forall n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

ce qui signifie que la suite (f_n) converge uniformément vers f .

Exemple 3.4. Soit (c_n) une suite bornée de nombres complexes. Considérons la suite (f_n) définie par

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k \quad \text{dans} \quad E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta < 1\}.$$

Alors, on a

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k z^k \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |z^k| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |\delta^k| = \frac{M\delta^{n+1}}{1-\delta} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow +\infty.$$

3.4 Théorèmes fondamentaux sur les suites uniformément convergentes

3.4.1 Continuité

Théorème 3.2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur une partie I de $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Si (f_n) converge uniformément sur I vers une limite f , alors f est continue sur I .

Démonstration 3.3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) converge uniformément vers f , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixons $n_0 \geq N$. Comme f_{n_0} est continue en $x_0 \in I$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, pour tout x tel que $|x - x_0| < \delta$, on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ainsi, f est continue en x_0 . Comme x_0 est arbitraire, f est continue sur I .

Corollaire 3.3. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur I et converge uniformément vers f , alors f est continue sur I .

Remarque 3.2. 1. La limite d'une suite de fonctions continues peut être discontinue si la convergence n'est pas uniforme.

2. La convergence uniforme est une condition suffisante pour garantir la continuité de la limite, mais elle n'est pas nécessaire.

3.4.2 Intégration

Théorème 3.4. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Si (f_n) converge uniformément vers une limite f , alors :

1. f est intégrable sur $[a, b]$;
2. la limite et l'intégrale peuvent s'intervertir :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration 3.4. Comme f_n est intégrable, il existe pour chaque n des fonctions en escalier

$\phi_n, \theta_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

1. $\forall x \in [a, b], |f_n(x) - \phi_n(x)| \leq \theta_n(x)$;

2. $\int_a^b \theta_n(x) dx \leq \frac{1}{n}$.

Puisque (f_n) converge uniformément vers f , posons

$$\varepsilon_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors, pour tout $x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n + \theta_n(x),$$

et

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon_n(b-a) + \int_a^b \theta_n(x) dx \leq \varepsilon_n(b-a) + \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

D'après le théorème des gendarmes pour les intégrales, f est intégrable et :

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0.$$

Ainsi, on peut interchanger limite et intégrale.

3.4.3 Dérivabilité

Théorème 3.5. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, vérifiant les hypothèses suivantes :

1. Pour tout n , f_n est dérivable et ses dérivées f'_n sont continues sur I ;
2. Il existe un $x_0 \in I$ tel que $f_n(x_0)$ converge vers $f(x_0)$;
3. La suite (f'_n) converge uniformément sur I .

Alors :

1. La suite (f_n) converge uniformément sur I ;
2. La limite f de la suite (f_n) est dérivable et pour tout $x \in I$, on a :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' (x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n'(x).$$

Démonstration 3.5. Soit $x_0 \in I$ et posons la suite de fonctions (ϕ_n) définie par :

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & \text{si } x \neq x_0, \\ f_n'(x_0), & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

De même, posons la fonction ϕ associée à la limite :

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & \text{si } x \neq x_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x_0), & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Les fonctions ϕ_n sont continues au point x_0 et convergent simplement vers ϕ sur I . Nous allons montrer que (ϕ_n) converge uniformément vers ϕ sur I .

Par hypothèse, la suite (f_n) converge uniformément sur I , ce qui implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, p \geq N$:

$$\forall x \in I, \quad \|f_n'(x) - f_p'(x)\| < \varepsilon.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis, pour $x \neq x_0$, on obtient :

$$\|f_n(x) - f_p(x) - f_n(x_0) + f_p(x_0)\| < \varepsilon|x - x_0|.$$

En divisant par $|x - x_0|$, on a :

$$\|\phi_n(x) - \phi_p(x)\| < \varepsilon.$$

Cette inégalité reste vraie également pour $x = x_0$ par continuité de ϕ_n . Ainsi, en faisant tendre p vers l'infini, on obtient, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in I$:

$$\|\phi_n(x) - \phi(x)\| < \varepsilon.$$

Cela montre que la suite de fonctions (ϕ_n) converge uniformément vers ϕ sur I .

De plus, puisque (f_n) converge uniformément sur I et que (f'_n) converge uniformément sur I , la suite (f_n) est uniforme de Cauchy sur $[a, b]$. Comme E est complet, cette suite converge uniformément vers une fonction limite f .

Ainsi, par le théorème sur la continuité de la limite, f est de classe C^1 sur I et sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Cela conclut la démonstration.

3.5 Séries de fonctions

3.5.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . La suite (S_n) de terme général $\sum_{k=0}^n f_k$ est appelée suite des sommes partielles.

Définition 3.4. On note $\sum_n f_n$ la série de fonctions de terme général f_n .

Définition 3.5. Une série de terme général f_n est dite convergente simplement sur E si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge simplement sur E . La limite de la suite $(S_n)_n$, notée par S , est appelée somme de la série $\sum f_n$, et on la note :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k \geq 0} f_k.$$

Définition 3.6. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur E si et seulement si, pour tout x_0 fixé dans E , la série numérique $(\sum f_n(x_0))$ converge.

Définition 3.7. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur E si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est uniformément convergente sur E , ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon), \forall x \in E : |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 3.3. Si une série de fonctions (f_n) converge uniformément sur E , alors elle est simplement convergente sur E . En revanche, la réciproque est fausse.

Définition 3.8. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur E si et seulement si la série $\sum |f_n|$ converge sur E .

3.5.2 Critère de cauchy pour la convergence uniforme

Théorème 3.6. une série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur E ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \text{ et } m > n \Rightarrow \forall x \in E, \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

3.6 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 3.9. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions réelles ou complexes définies sur E (partie de \mathbb{R} ou \mathbb{C}). S'il existe une série numérique de terme général a_n telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |f_n(x)| \leq a_n.$$

Théorème 3.7. Si une série de fonction est normalement convergente sur E alors elle est absolument et uniformément convergente sur E

3.7 Propriétés de la somme d'une série de fonctions liées à la convergence uniforme

3.7.1 Continuité

Théorème 3.8. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur une partie $I = [a, b]$ de \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Si cette série converge uniformément sur I , alors sa somme est continue sur I .

Démonstration 3.6. Il suffit d'appliquer le théorème sur la continuité du chapitre 3 à la suite (S_n) des sommes partielles.

Exercice 3.1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions donnée par son terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\exp(-nx)}{n+1}.$$

1. Déterminer le domaine de convergence Δ de la série donnée.
2. Montrer que $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est continue sur $\Delta - \{0\}$.

solution 1. 1. *Domaine de convergence de la série $\sum f_n$*

Nous considérons la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, avec le terme général :

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\exp(-nx)}{n+1}.$$

Nous allons analyser la convergence de cette série pour différentes valeurs de x .

Cas 1 : $x < 0$

*Lorsque $x < 0$, la fonction $\exp(-nx)$ croît exponentiellement pour $n \rightarrow +\infty$. En effet, pour $x < 0$, on a $\exp(-nx) \rightarrow +\infty$ lorsque n augmente. Par conséquent, la suite $(f_n(x))$ ne tend pas vers zéro, et donc la série $\sum f_n(x)$ **diverge** pour $x < 0$.*

Cas 2 : $x > 0$

Pour $x > 0$, nous utilisons un critère de convergence. On a, pour tout $x > 0$, l'inégalité suivante pour $|f_n(x)|$:

$$|f_n(x)| = \frac{\exp(-nx)}{n+1}.$$

Pour $x \geq a > 0$, on peut obtenir l'estimation :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\exp(na)}.$$

Le terme $\frac{1}{\exp(na)}$ est le terme général d'une série géométrique de raison $\exp(-a)$, qui est convergente pour $a > 0$. Ainsi, la série $\sum |f_n(x)|$ converge normalement pour $x > 0$, ce qui implique que la série $\sum f_n(x)$ converge normalement sur $(0, +\infty)$.

Cas 3 : $x = 0$

En $x = 0$, nous avons :

$$f_n(0) = (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0)$ devient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Il s'agit d'une **série alternée** de termes $a_n = \frac{1}{n+1}$, qui est décroissante et tend vers zéro.

D'après le critère de Leibniz pour les séries alternées, cette série converge. Ainsi, la série $\sum f_n(x)$ converge en $x = 0$.

On déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge donc sur $\Delta = [0, +\infty[$.

2. Continuité de la somme $f(x)$

La fonction $f(x)$ est définie par la somme de la série :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Il nous faut maintenant prouver que $f(x)$ est continue sur $\Delta - \{0\}$.

Convergence uniforme de la série sur Δ

Pour prouver la continuité de $f(x)$, nous devons vérifier si la série converge **uniformément** sur Δ . Nous savons que :

- La série converge normalement pour $x > 0$.
- La série converge également en $x = 0$ (en raison de la convergence de la série alternée).

Pour prouver la convergence uniforme, on examine le reste $R_n(x)$ associé à la somme partielle $S_n(x)$ de la série :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

où $S_n(x)$ est la somme partielle et $R_n(x)$ est le reste d'ordre n .

Nous avons l'estimation suivante pour $|R_n(x)|$:

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{\exp(-(n+1)x)}{n+2}.$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, cette estimation montre que :

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+2},$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Cela montre que la suite des sommes partielles $S_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ sur $\Delta = [0, +\infty[$.

Continuité de $f(x)$ sur $\Delta - \{0\}$

La convergence uniforme de la série, associée à la continuité de chaque fonction $f_n(x)$, permet, d'après le théorème de convergence uniforme, de conclure que $f(x)$ est continue sur $\Delta - \{0\}$.

En Conclusion,

- Le domaine de convergence de la série $\sum f_n(x)$ est $\Delta = [0, +\infty[$.
- La fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $\Delta - \{0\}$.

3.7.2 Intégration

Théorème 3.9. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions réelles, intégrables sur un intervalle $[a, b]$. Si cette série converge uniformément sur $[a, b]$, alors :

1. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $[a, b]$.

2. On a

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Démonstration 3.7. Il suffit d'appliquer le théorème sur l'intégration des suites uniformément convergentes du chapitre 3 à la suite (S_n) des sommes partielles.

3.7.3 Dérivation

Théorème 3.10. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continûment dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Si :

- La série $\sum f_n$ converge en au moins un point $x_0 \in I$.
- La série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I .

Alors :

1. La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I .
2. La somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable sur I et l'on a

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in I.$$

Démonstration 3.8. Il suffit d'appliquer le théorème sur la dérivation des suites uniformément convergentes du chapitre 3 à la suite (S_n) des sommes partielles.

3.8 Exercices

Exercice 3.2. On considère les suites de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n, \quad g_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad h_n(x) = \frac{x}{1 + nx}, \quad i_n(x) = \begin{cases} x^n \log x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de ces suites de fonctions sur $[0, 1]$.

Exercice 3.3. Soit $\alpha \geq 0$ un nombre réel et (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^\alpha}.$$

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

2. Dans les cas $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$, étudier la convergence de la suite $\int_0^1 f_n(x) dx$.

Exercice 3.4. Soit la suite de fonctions (f_n) définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Montrer que la convergence de la suite est uniforme sur $[-1, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$ sur tout intervalle de la forme $[-1, b]$ avec $b < 0$ ou $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 3.5. On considère la suite de fonctions définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx} + nx^3}{1 + nx^2}.$$

1. Déterminer la limite simple de cette suite sur \mathbb{R}^+ .

2. Montrer que la convergence de la suite est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, b]$, avec $0 < a < b$. La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R}^+ ?

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, où $I_n = \int_1^2 \frac{e^{-nx} + nx^3}{1+nx^2} dx$.

Exercice 3.6. Étudier la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence normale des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} e^{-n^2 x}, \quad x \in]0, +\infty[,$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}, \quad x \in]0, +\infty[,$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{e^{nx}}, \quad x \in \mathbb{R}^* .$$

Exercice 3.7. On considère la série de fonctions de terme général :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x)} .$$

1. Étudier la convergence de cette série.
2. Étudier la dérivabilité de sa somme S , notamment en zéro à droite.
3. Montrer que $S(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

4 Séries entières

4.1 Définitions et convergence

Définition 4.1. On appelle série entière de la variable réelle ou complexe z toute série de fonctions de la forme

$$\sum f_n(z) = \sum a_n z^n, \quad \text{avec } a_n \text{ une suite réelle ou complexe.}$$

La suite (a_n) est appelée la suite des coefficients de la série entière $\sum f_n(z) = \sum a_n z^n$.

Exemple 4.1. *La série géométrique*

$$\sum_{n \geq 0} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

est une série entière de la variable réelle x .

4.1.1 Convergence d'une série entière

Définition 4.2. On appelle somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} f_n(z) = \sum a_n z^n$ la fonction $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Théorème 4.1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Il existe un unique nombre réel R tel que :

1. Si $|z| < R$, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ est divergente.

Démonstration 4.1. Soit E l'ensemble des nombres réels $r \geq 0$ tels que la suite $(|a_n| r^n)$ soit bornée. L'ensemble E est non vide puisqu'il contient au moins 0.

Si E n'est pas majoré, nous posons $R = +\infty$.

Si E est majoré, nous posons $R = \sup E$ (le $\sup E$ existe d'après l'axiome de la borne supérieure).

a. Supposons $|z| < R$. Alors il existe $r_0 \in E$ tel que $|z| < r_0 < R$. La suite numérique $(u_n)_n$ de terme général $u_n = |a_n| r_0^n$ est bornée. Cela permet de conclure que la série $\sum a_n z^n$ est uniformément convergente et donc absolument convergente.

Ainsi, la série converge absolument.

b. Supposons $|z| > R$. Alors $|z|$ n'appartient pas à l'ensemble E . Donc la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = |a_n z^n|$ n'est pas bornée. On en déduit que la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge.

Pour l'unicité de R , supposons l'existence de R_1 et R_2 tels que $0 < R_1 < R_2 < +\infty$, satisfaisant tous les deux aux propriétés a. et b. Alors, pour un nombre r choisi tel que $R_1 < r < R_2$, la série $\sum a_n z^n$ devrait à la fois converger et diverger, ce qui est absurde.

Lemme 4.1. (Lemme d'Abel) S'il existe un z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée, alors pour tout nombre complexe z tel que $0 \leq |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration 4.2. Supposons que $z_0 \neq 0$ et posons $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n z_0^n|$.

Si $0 \leq |z| < |z_0|$, on a

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M q^n, \quad 0 \leq q = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1.$$

La série $\sum q^n$, avec $|q| < 1$, est une série géométrique convergente. Par comparaison avec cette dernière, on déduit que $\sum |a_n z^n|$ est convergente, c'est-à-dire que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 4.3. (Rayon de convergence)

On appelle rayon de convergence le nombre R donné par

$$R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

Définition 4.4. L'ensemble, noté D , suivant

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$$

est appelé disque de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans le cas où la variable z est complexe.

Il est appelé intervalle de convergence dans le cas d'une série entière de variable réelle.

Théorème 4.2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . La série est normalement convergente sur le disque fermé

$$\overline{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}, \quad r \leq R.$$

4.1.2 Détermination du rayon de convergence

Proposition 4.1. (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, alors $R = \frac{1}{\rho}$.
2. Si $\rho = +\infty$, alors $R = 0$, et si $\rho = 0$, alors $R = +\infty$.

Exemple 4.2. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n e^n}$ est $R = e$. En effet,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n e^n}{(n+1) e^{n+1}} = \frac{1}{e}.$$

Proposition 4.2. (Règle de Cauchy)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, alors $R = \frac{1}{\rho}$.
2. Si $\rho = +\infty$, alors $R = 0$, et si $\rho = 0$, alors $R = +\infty$.

Exemple 4.3. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{e^{n^2}}$ est $R = (-\infty, +\infty)$. En effet,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^{n^2}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{e^n}} = 0.$$

Remarque 4.1. Dans le cas où les limites précédentes n'existent pas, on passe à la limite supérieure (qui existe toujours).

4.2 Opérations sur les séries entières

4.2.1 Structures algébriques

Définition 4.5. (Addition de deux séries)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On appelle **Série somme** la série entière

$$\sum (a_n + b_n) z^n.$$

Théorème 4.3. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 , respectivement.

La série entière $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n$ converge absolument pour $|z| < \min(R_1, R_2)$, et le rayon de convergence R de la série somme vérifie

$$R \geq \min(R_1, R_2).$$

De plus, la somme vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Démonstration 4.3. Si $|z| < R_1$ et $|z| < R_2$, les deux séries entières convergent absolument. La série entière somme converge également puisque l'inégalité triangulaire donne

$$|(a_n + b_n)z^n| \leq |a_n z^n| + |b_n z^n|.$$

On en déduit que $R \geq \min(R_1, R_2)$. Si $R_1 \neq R_2$, par exemple si $R_1 < R_2$, alors pour tout z tel que $R_1 < |z| < R_2$, la série $\sum b_n z^n$ converge et la série $\sum a_n z^n$ diverge. Il ne peut y avoir de convergence pour la série somme. Dans ce cas, $R = \min(R_1, R_2)$. La formule finale découle de celle donnant la somme de deux séries convergentes.

Définition 4.6. Soient $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle

Série produit par $\alpha \in \mathbb{C}$, la série entière $\alpha \sum a_n z^n$.

Théorème 4.4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

La série entière $\alpha \sum a_n z^n$, avec $\alpha \neq 0$, ne change pas de rayon de convergence. De plus, si $|z| < R$,

on a

$$\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n z^n.$$

Démonstration 4.4. La preuve est évidente.

Définition 4.7. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On appelle

Série produit ou encore **série produit de Cauchy**, la série entière

$$\sum c_n z^n, \quad \text{avec } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Théorème 4.5. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 , respectivement.

La série entière produit $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)$ converge absolument pour $|z| < \min(R_1, R_2)$.

Sa somme vérifie

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad \text{avec } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

4.2.2 Séries entières dérivée et primitives

Définition 4.8. On appelle série entière dérivée d'une série entière $\sum a_n z^n$ la série entière

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Définition 4.9. On appelle série entière primitive d'une série entière $\sum a_n z^n$ la série entière

$$\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}.$$

Remarque 4.2. Le rayon de convergence de la série primitive et de la série dérivée sont identiques, et ils sont égaux au rayon de convergence de la série initiale.

4.3 Propriétés de la somme d'une série entière

Théorème 4.6. Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.

4.3.1 Continuité de la somme d'une série entière

Théorème 4.7. Soient $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence, et S sa somme.

Alors la fonction S est continue sur le disque ouvert $D(0, R)$.

Démonstration 4.5. D'après le théorème (3.3), la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur tout disque fermé de convergence $\overline{D}(0, r)$ et sur tout compact inclus dans $\overline{D}(0, r)$. De plus, toutes les fonctions f_n définies par $a_n z^n$ sont continues sur $D(0, R)$. On conclut que la fonction somme S est continue.

4.3.2 Intégration de la fonction somme

Théorème 4.8. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$.

Si $[a, b]$ est un segment inclus dans l'intervalle de convergence $] - R, R[$, alors

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

Démonstration 4.6. Voir la démonstration du théorème sur l'intégration de la somme d'une série de fonctions.

Exemple 4.4. La série $\sum x^n$ est convergente dans $] - 1, 1[$ vers sa somme $S(x) = \frac{1}{1-x}$. En effet, la série $\sum x^n$ est uniformément convergente sur tout $[0, x]$ avec $x < 1$, vers sa somme $S(x) = \frac{1}{1-x}$, qui est intégrable sur tout $[0, x]$, $x < 1$. On a

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt \implies \log(1-x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Théorème 4.9. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de variable complexe, de rayon de convergence $R > 0$. La somme de cette série est dérivable, et sa dérivée, notée S' , est la somme de la dérivée de la série $\sum a_n z^n$, c'est-à-dire

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n z^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Remarque 4.3. Le rayon de convergence de la série primitive et de la série dérivée sont identiques, et ils sont égaux au rayon de convergence de la série initiale.

Corollaire 4.10. *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, si la fonction somme S est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$, alors*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Exemple 4.5. *La série $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$, pour $x \in] -1, +1[$, a pour somme $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En effet,*

$$\sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)' = S'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

4.4 Développement de fonctions en séries entières

Définition 4.10. 1. On dit qu'une fonction f réelle ou complexe définie dans D , un voisinage de 0, est développable en série entière s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul, telle que

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Définition 4.11. On dit que f , réelle ou complexe, définie dans D , un voisinage de z_0 , est développable en série entière si la fonction $f : z \mapsto f(z - z_0)$ est développable en série entière en 0.

Théorème 4.11. *Pour qu'une fonction f définie sur D , soit développable dans D en série de Taylor (aussi appelée série de Maclaurin), donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

il faut et il suffit que :

1. Elle soit de classe \mathcal{C}^∞ dans D .
2. Le reste $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ tende vers 0 pour z fixé dans D et $n \rightarrow \infty$.

Théorème 4.12. (Condition suffisante)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant la condition suivante :

$$\exists M > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall z \in]-r, r[, \quad |f^{(n)}(z)| \leq M.$$

Alors, pour tout $x \in]-r, r[$, la fonction est somme de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

qui est de rayon de convergence supérieur ou égal à r .

Proposition 4.3. Soient f et g deux fonctions développables en série entière autour de 0, telles que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Alors :

1. $f + g$ est développable en série entière autour de 0, et

$$(f + g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

2. $f \cdot g$ est développable en série entière autour de 0, et

$$(f \cdot g)(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

$$\text{où } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

3. La dérivée de f , notée f' , est développable en série entière autour de 0, et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

4. Une primitive F de f est développable en série entière autour de 0, et

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

5. Si f est paire, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $a_{2p+1} = 0$.

6. Si f est impaire, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $a_{2p} = 0$.

Exemple 4.6. 1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \exp(x).$$

On a f de classe \mathcal{C}^∞ , et $f^{(n)}(x) = \exp(x)$ pour tout n . De plus, f est majorée sur tout intervalle $] -r, r[$. D'après le théorème précédent,

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = +\infty.$$

2. On considère la fonction

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}.$$

La fonction \cos est de classe \mathcal{C}^∞ , et toutes ses dérivées sont bornées sur tout intervalle $] -r, r[$.

D'après le théorème précédent,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i^n + (-i)^n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty,$$

car

$$i^n + (-i)^n = \begin{cases} 2(-1)^p, & \text{si } n = 2p, \\ 0, & \text{si } n = 2p + 1. \end{cases}$$

4.5 Développements usuels

4.5.1 Développements en série entière complexe

Fonction	Développement	Domaine de convergence
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$ z < 1$
$\frac{1}{1+z}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$	$ z < 1$
$\frac{1}{1+z^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$	$ z < 1$
e^z	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$	$z \in \mathbb{C}$

4.5.2 Développements en série entière réelle

Fonction	Développement	Domaine de validité
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$	$ x < 1$
$\frac{1}{(1-x)^\alpha}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+\alpha-1}^n x^n$	$ x < 1$
$\ln(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$ x < 1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$ x < 1$

4.6 Exercices

Exercice 4.1. Déterminer le rayon, l'intervalle de convergence et la somme des séries entières de termes généraux :

$$(-1)^{n+1}nx^{2n+1}, \quad (\cosh n)x^n, \quad (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}, \quad (-1)^n \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

Exercice 4.2. Développer la fonction f donnée par $f(x) = \cos(x) \cosh(x)$ en série entière au voisinage de 0.

Exercice 4.3. Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle suivante qui sont développables en série entière en 0 :

$$(E) \quad x^2(l-x)y'' - x(l+x)y' + y = 0.$$

5 Séries de Fourier

5.1 Séries trigonométriques et séries de Fourier

Définition 5.1. On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{C}^2.$$

Remarque 5.1. La série trigonométrique peut aussi s'écrire sous la forme exponentielle :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Dans ce cas,

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & \text{si } n > 0, \\ a_0, & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Définition 5.2. On dit qu'une fonction réelle f est T -périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

5.2 Convergence d'une série trigonométrique

Définition 5.3. La convergence d'une série trigonométrique est, par définition, équivalente à celle de la suite des sommes partielles associées :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés 5.1. Lorsque cette série converge pour tout réel x , on note $S(x)$ sa somme. On remarque alors que S est une fonction 2π -périodique.

Théorème 5.1. La série trigonométrique

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

est normalement convergente sur \mathbb{R} si et seulement si l'une des séries numériques

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| \quad \text{ou} \quad \sum_{n \geq 0} (|a_n| + |b_n|)$$

est convergente.

Proposition 5.1. Si $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites décroissantes de nombres réels positifs ou nuls tendant vers 0, alors les séries trigonométriques

$$\sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx)$$

convergent uniformément sur tout segment inclus dans $]0, 2\pi[$.

Définition 5.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux si :

1. elle est définie sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points x_k , avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$;

2. la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ est continue et admet des limites finies aux bornes.

Définition 5.5. De même, une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite de classe \mathcal{C}^k par morceaux si :

1. elle est k fois continûment dérivable sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points ;
2. sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, elle est de classe \mathcal{C}^k et admet des limites finies aux bornes pour ses dérivées jusqu'à l'ordre k .

Définition 5.6. On appelle série de Fourier toute série trigonométrique de la forme

$$a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $T = 2\pi$, la série de Fourier s'écrit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

5.2.1 Coefficients de Fourier

Définition 5.7. Soit f une fonction 2π -périodique intégrable définie sur \mathbb{R} . On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique :

$$S_f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

Définition 5.8. Soit f une fonction 2π -périodique intégrable définie sur \mathbb{R} . On appelle série de Fourier complexe de f , la série de fonctions :

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{-inx}$$

Définition 5.9. Soit f une fonction 2π -périodique intégrable définie sur \mathbb{R} , on appelle coefficients de Fourier de f , les nombres réels :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Les coefficients de Fourier complexes de f sont :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Lemme 5.1. *Si f est une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} et intégrable sur tout segment de \mathbb{R} , alors les coefficients de Fourier de f sont :*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha+2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha+2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Démonstration 5.1. *On a :*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\alpha} f(x) \cos(nx) dx + \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos(nx) dx + \int_{\alpha+2\pi}^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \right)$$

En utilisant la périodicité de f , on obtient :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha+2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

Car $\int_{\alpha+2\pi}^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \int_{\alpha}^0 f(x) \cos(nx) dx$. De même, on peut calculer b_n de manière analogue.

Propriétés 5.2. – *Si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$.*

Ainsi, la série de Fourier de f est donnée par :

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$$

– *Si f est paire, alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$. Ainsi, la série de Fourier de f est donnée par :*

$$S_f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx)$$

Exemple 5.1. La série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$ est :

$$S_f(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

En effet, f est impaire, donc $a_n(f) = 0$ pour tout n , et les coefficients $b_n(f)$ sont donnés par :

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \frac{-\pi \cos(n\pi)}{n} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

5.2.2 Convergence

Théorème 5.2. (Jordan-Dirichlet) Soit f une fonction définie, 2π -périodique sur \mathbb{R} et intégrable.

Si elle vérifie de plus l'une ou l'autre des conditions suivantes :

- (a) elle est monotone par morceaux ;
- (b) elle est continue par morceaux et admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors, la série de Fourier de f satisfait les résultats suivants :

1. La série de Fourier de f converge pour tout x réel, et on a

$$S_f(x) = \frac{f^{(+)}(x) + f^{(-)}(x)}{2}$$

2. La convergence de la série de Fourier de f est uniforme sur tout intervalle $[a, b]$ où :

- f est continue dans le cas de (a),
- f est à dérivée bornée dans le cas de (b).

Exercice 5.1. On considère la fonction f , 2π -périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\\ x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[\end{cases}$$

1. Quelle est la classe de cette fonction ?

2. Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

solution 2. 1. La fonction f est 2π -périodique, monotone par morceau et impaire.

2. Détermination des coefficients de Fourier de f :

– $a_n = 0$ (car f est impaire),

–

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{p+1}}{2p}, & \text{si } n = 2p; \\ \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)^2}, & \text{si } n = 2p + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où la série de Fourier de f est :

$$S_f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p} \sin(2px) + \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)^2} \sin((2p+1)x).$$

D'après le théorème de Jordan-Dirichlet, $S_f(x)$ converge vers f sauf aux points $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$,

où elle converge vers :

$$\frac{f^{(+)}(x_k) + f^{(-)}(x_k)}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4}.$$

5.3 Exercices

Exercice 5.2. Soit f une fonction réelle 2π -périodique, impaire et telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \pi - x, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Quelle est la classe de la fonction f ?
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques.
3. Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
4. En déduire les sommes des séries :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 5.3. On considère la fonction f 2π -périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, \frac{-\pi}{2}]; \\ x, & x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

1. Quelle est la classe de cette fonction ?
2. Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

Exercice 5.4. 1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique, et donnée pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}.$$

2. Montrer que f est développable en série de Fourier.
3. En déduire la somme de chacune des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Bibliographie

- [1] S. Balac, F. Sturm. *Algèbre et analyse : Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés*. Collection INSA de Lyon, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2008.
- [2] R. G. Bartle, D. R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis*. 4th edition, Wiley, 2011.
- [3] R. Bhatia. *Matrix Analysis*. Springer, 2013. (Includes material on series of matrices and convergence criteria).
- [4] F. Delmer. *Mathématiques les séries : Rappels du cours et exercices résolus*. Dunod, 1995.
- [5] G. Genet, G. Pupion. *Analyse moderne, tome 1 : espaces métriques, séries, systèmes différentiels*. Résumé de cours et exercices corrigés, MP2-PC2. Vuibert, 1972.
- [6] C. Jordan. *Cours d'analyse : Série de fonctions et séries de Fourier*. Hermann, 2009.
- [7] K. Knopp. *Theory of Series*. Dover Publications, 1990.
- [8] M. Marcus, H. Minc. *Introduction to Linear Algebra and Matrix Theory*. 2nd edition, Dover, 2019.
- [9] W. W. Osgood. *Theory of Functions of a Real Variable*. Dover Publications, 2003.
- [10] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. 4th edition, Pearson, 2010.
- [11] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd edition, McGraw-Hill, 1976.

-
- [12] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. 3rd edition, McGraw-Hill, 1987.
- [13] J. P. Serre. *Series and Summation Methods*. Springer, 2018.
- [14] M. Spivak. *Calculus*. 4th edition, Cambridge University Press, 2008.
- [15] E. M. Stein, R. Shakarchi. *Real Analysis : Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2005.
- [16] T. Tao. *Analysis I*. 2nd edition, Springer, 2018.