



Université de Béjaïa, Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Cours de Dynamique Des Structures 1

Master 1 Génie Civil
Option : Structures

Réalisé par :
M^{me} Seghir née Kada Ouassila
Maître de conférences

Avant propos

Le polycopié de cours Dynamique Des Structures I est destiné aux étudiants de niveaux première année Master en Génie civil, Option Structures. Il donne les outils et les méthodes nécessaires pour calculer et analyser les structures de génie civil lorsqu'elles sont soumises à des chargements dynamiques en général et au chargement sismique en particulier. Des exemples d'applications détaillés sont donnés pour assimiler les concepts étudiés.

Conformément au canevas de formation, le cours est organisé en trois chapitres. Le premier est une introduction à la dynamique des structures, le deuxième chapitre est consacré à l'étude des systèmes à un degré de liberté sous différentes formes d'excitations dynamiques, quant au troisième chapitre, il concerne la caractérisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Table des matières

1	Introduction à la Dynamique Des Structures	4
1.1	Introduction	4
1.2	Excitation dynamique	5
1.2.1	Charge périodique	5
1.2.2	Charge apériodique	5
1.3	Problème dynamique	6
1.4	Nombre de degrés de liberté	7
1.5	Méthodes de discrétisation	8
1.5.1	Méthode de masses concentrées	9
1.5.2	Méthode des éléments finis	9
1.6	Procédure générale d'une analyse dynamique	9
2	Systèmes à un degré de liberté	11
2.1	Formulation de l'équation de mouvement	11
2.1.1	Modélisation : modèle dynamique élémentaire	11
2.1.2	Équation de mouvement	17
2.1.3	Effets des forces de la pesanteur (gravité)	18
2.1.4	Vibrations dues à un mouvement à la base : Excitation d'appuis	19
2.2	Vibrations libres	21
2.2.1	Vibrations libres non amorties	21
2.2.2	Vibrations libres amorties	23
2.2.3	Applications	32
2.3	Vibrations forcées : Chargement harmonique	38
2.3.1	Systèmes non-amortis	39
2.3.2	Systèmes amortis	43
2.3.3	Réponse d'un système à 1ddl en cas de résonance	48
2.3.4	Isolation vibratoire	51

2.3.5	Application	57
2.4	Vibrations forcées : chargement par impulsion	60
2.4.1	Impulsion rectangulaire	60
2.4.2	Application	63
2.4.3	Impulsion sinusoïdale	65
2.4.4	Impulsion triangulaire	68
2.4.5	Calcul approché de la réponse à un chargement par impulsion	69
2.4.6	Application	71
2.5	Réponse à un chargement dynamique quelconque : Intégrale de Duhamel	72
2.5.1	Système non-amorti	72
2.5.2	Système amorti	73
2.5.3	Application	73
2.6	Spectre de réponse	75
2.6.1	Réponse sismique d'un système à un degré de liberté	75
2.6.2	Spectres de réponse exacts	76
2.6.3	Pseudo-Spectres de réponse	78
2.6.4	Application : Utilisation du spectre d'un accélérogramme	79
2.6.5	Spectre de réponse réglementaire	81
2.6.6	Application : Utilisation du spectre de calcul RPA99/2003	82
3	Systèmes à plusieurs degrés de liberté	85
3.1	Introduction	85
3.2	Modélisation	85
3.2.1	Méthode des éléments finis	85
3.2.2	Méthode des masses concentrées	86
3.3	Formulation des équations de mouvement : Expression de l'équilibre dynamique	87
3.4	Détermination des matrices caractéristiques	88
3.4.1	Matrice rigidité [K]	88
3.4.2	Matrice Masse [M]	91
3.5	Modélisation simplifiée masses-ressorts	93
3.5.1	Système soumis à une force	93
3.5.2	Excitation d'appuis : mouvement à la base	94
3.6	Application	96

Chapitre 1

Introduction à la Dynamique Des Structures

1.1 Introduction

L'objectif principal de la dynamique des structures est l'étude des structures soumises à des excitations dynamiques.

- Le terme "dynamique" signifie, d'une manière générale, variable dans le temps. Un chargement dynamique représente donc une force dont l'intensité et/ou le point d'application et/ou la direction varient dans le temps.

- Les structures concernées par le génie civil sont très variées : bâtiments, ouvrages d'art, ponts, tunnels, réservoirs, sol, murs de soutènement,...etc.

Selon la nature de la structure, le but de l'étude peut être le dimensionnement, estimation de la performance, le renforcement, prévenir le risque de glissement ou de liquéfaction dans le sol,...etc.

Dans le domaine "élastique linéaire", lorsqu'une structure est soumise à des charges dynamiques et à d'autres statiques, on peut calculer les réponses, statique et dynamique, séparément puis superposer leurs effets.

L'objectif du présent cours est de présenter les démarches à suivre pour calculer la partie dynamique de la réponse d'une structure, on supposera tout au long du cours que les structures sont en équilibre sous l'effet de toutes les forces statiques auxquelles elles sont soumises.

1.2 Excitation dynamique

Les excitations que peut subir une structure, peuvent être classées en deux catégories : charges Périodiques et charges Apériodiques (non périodiques).

1.2.1 Charge périodique

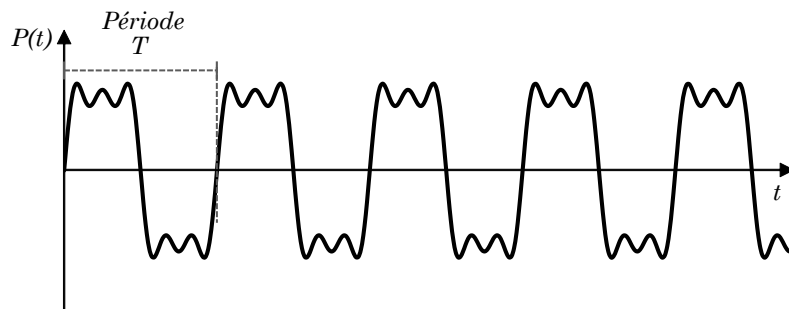


FIGURE 1.1 – Charge périodique

C'est une charge qui évolue en ayant la même forme sur un intervalle de temps qu'on appelle période (T) et qui se répète sur une longue durée (figure 1.1). En décomposant la charge périodique en une série de Fourier, elle peut être représentée par la superposition d'harmoniques simples.

La charge harmonique constitue la forme la plus simple du chargement périodique, elle suit une variation sinusoïdale (figure 1.2). Ce type de charge peut être induit par les machines tournantes.

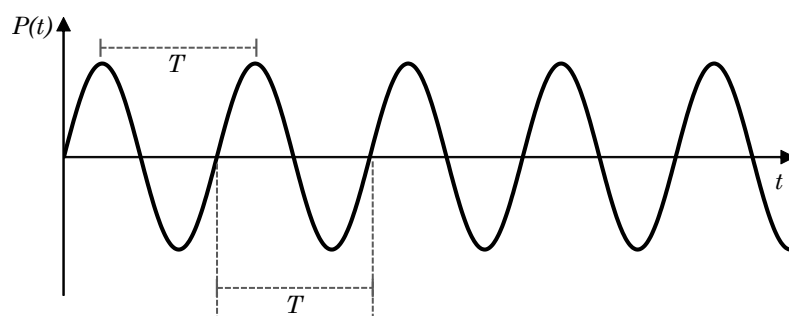


FIGURE 1.2 – Charge harmonique

1.2.2 Charge apériodique

C'est une charge qui varie de façon arbitraire dans le temps, elle peut être de courte durée (impulsion) ou de longue durée (entretenu ou transitoire).

Une impulsion est un chargement de très courte durée par rapport à la période propre de la structure étudiée. Ce type de chargement peut être causé par un choc, une explosion au voisinage d'un bâtiment (figure 1.3), la perte d'un appui...etc.

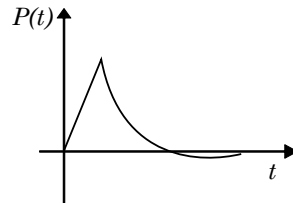


FIGURE 1.3 – Chargement de courte durée : Impulsion

Pour le chargement arbitraire de longue durée, on peut citer l'exemple typique d'une excitation sismique (tremblement de terre), qui peut être induite par un mouvement appliqué à la base des structures. Ce mouvement est généralement présenté sous forme d'un accélérogramme (l'accélération du sol en fonction du temps) appliqué à la base des constructions (figure 1.4).

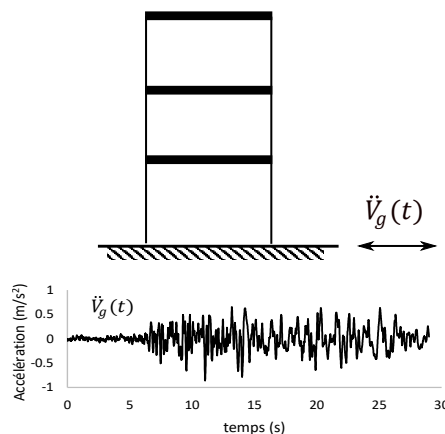


FIGURE 1.4 – Chargement sismique : Accélérogramme à la base d'un bâtiment

1.3 Problème dynamique

Pour voir la différence entre un problème dynamique et un problème statique, prenons l'exemple de la poutre représentée sur la figure 1.5. Dans un problème statique, le chargement P ainsi que la réponse (déformée, déplacement, efforts internes,...etc.) en tous points de la poutre sont constants alors que dans un problème dynamique, le chargement $P(t)$ étant variable dans le temps, à tout instant t correspond une réponse.

De plus dans un problème dynamique des forces d'inertie qui s'opposent aux accélérations de la poutre prennent naissance. Dans ce cas les efforts internes doivent équilibrer ces forces d'inertie en plus du chargement appliqué or dans le cas statique, les efforts internes ne dépendent que du chargement.

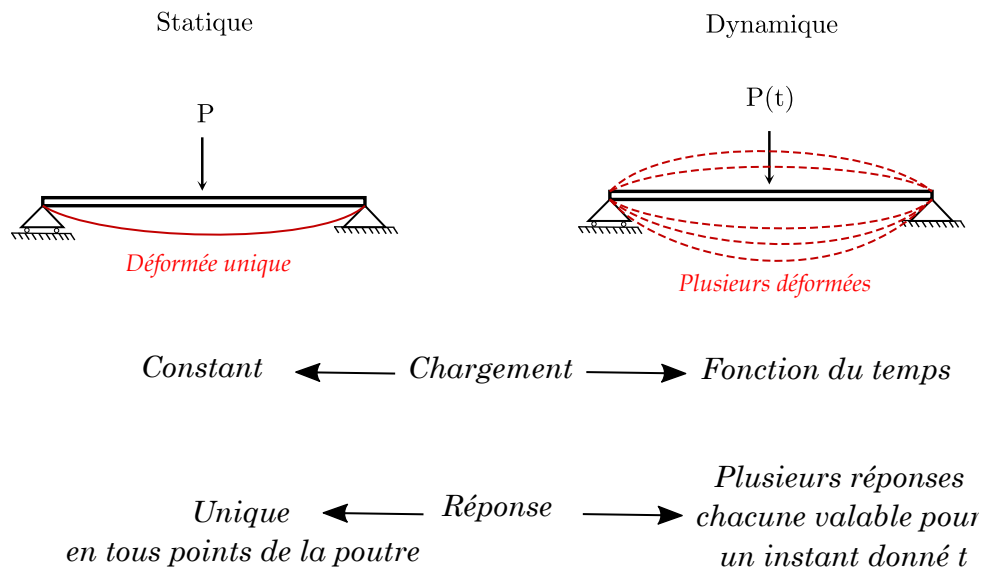


FIGURE 1.5 – Statique vs Dynamique

Remarque : La vitesse avec laquelle un chargement est appliqué, peut définir si le problème sera traité comme étant statique ou dynamique. Une action qui varie rapidement dans le temps crée des forces d'inertie d'où un problème dynamique. Par contre, une force qui varie lentement dans le temps ramène le problème au cas statique.

1.4 Nombre de degrés de liberté

C'est le nombre de coordonnées nécessaires pour définir la position de toutes les particules de masse d'un système. On peut aussi le définir comme étant le nombre de composantes de déplacements à considérer pour représenter les effets de toutes les forces d'inertie qui interviennent dans l'étude d'une structure. Tout simplement le nombre de degrés de liberté (ddl) correspond au nombre de possibilités de mouvements du système permettant de connaître son état de déformation. Prenons l'exemple du pendule de la figure 1.6, il suffit de connaître l'angle θ pour connaître l'état de déformation du pendule, ce qui en fait un système à 1ddl. Si on prend l'exemple du portique de la figure 1.7, il possède, a priori, une infinité de ddl, mais

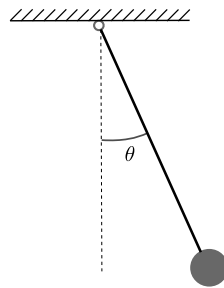


FIGURE 1.6 – Pendule : système à 1ddl

en supposant que toute la masse du portique est concentrée au niveau de la poutre, considérée infiniment rigide, on arrive à réduire le nombre de ddls à trois uniquement. Aussi en négligeant la rotation de la poutre et la déformation axiale des poteaux, on arrive à un système représenté avec un seul ddl, c'est le déplacement horizontal de la masse.

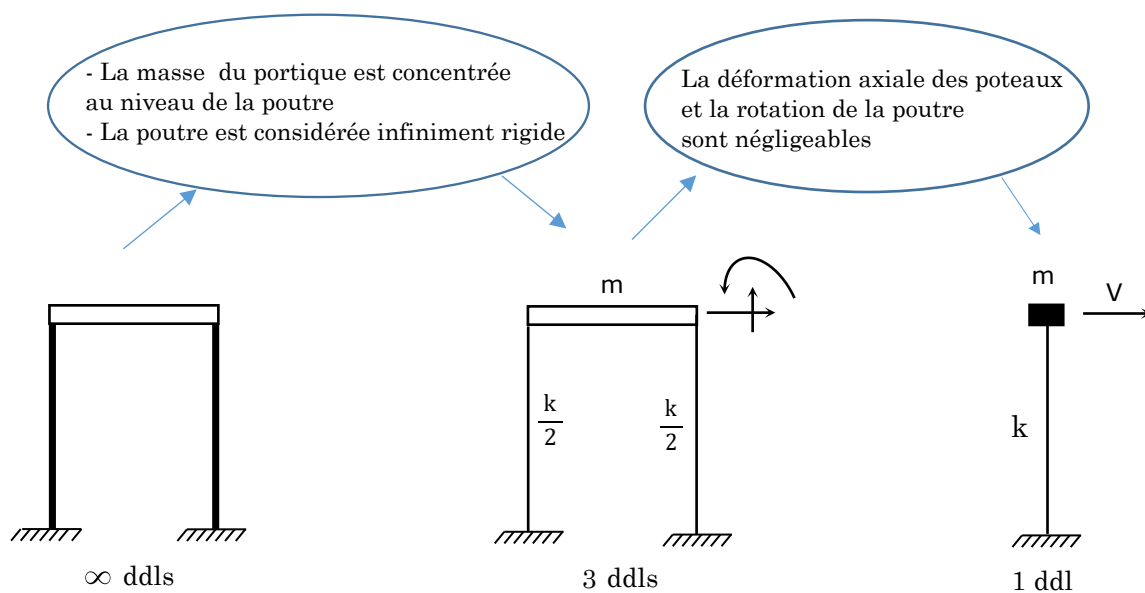


FIGURE 1.7 – Portique à 1ddl

1.5 Méthodes de discrétisation

Dans le but de réduire le nombre de degrés de liberté à considérer dans la modélisation d'une structure, on peut recourir à plusieurs méthodes. On présente, dans ce qui suit, les deux méthodes utilisées dans ce cours.

1.5.1 Méthode de masses concentrées

Si la masse d'un système peut être concentrée en un certain nombre de points séparés alors le nombre de ddls à considérer dans son analyse dynamique est égal au nombre de possibilités de mouvements des masses concentrées. En plan chaque masse possède trois ddls (deux translations et une rotation). Si on prend l'exemple de la poutre de la figure 1.8, en concentrant la masse en 5 points, on réduit le nombre de liberté à 15 ($5 \times 3 = 15$), en négligeant l'effort axial, la poutre sera représentée par 10 ddls ($5 \times 2 = 10$), et en négligeant aussi la rotation des masses, le nombre de ddls se réduit à 5.

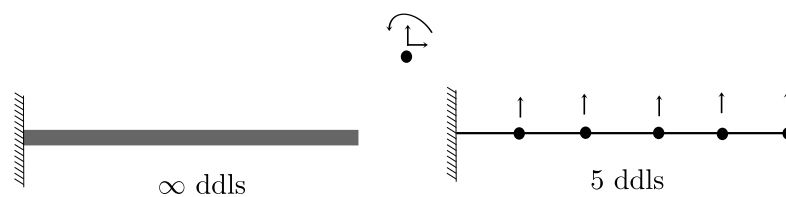


FIGURE 1.8 – Modélisation par concentration de la masse

1.5.2 Méthode des éléments finis

C'est une méthode très efficace pour étudier les structures complexes, elle consiste à diviser la structure en éléments reliés par des nœuds. Les déplacements des nœuds constituent les ddls, et par interpolation on peut déterminer les déplacements en tous points de la structure (figure 1.9).

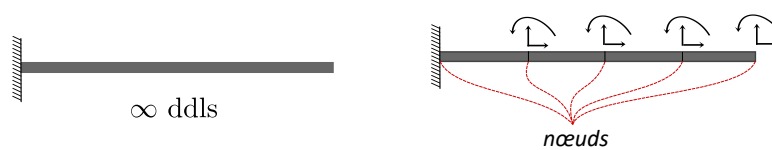


FIGURE 1.9 – Modélisation par éléments finis

1.6 Procédure générale d'une analyse dynamique

Pour effectuer une analyse complète d'un problème dynamique on passe par les étapes suivantes :

1. Définir le chargement dynamique auquel est soumise la structure étudiée.
2. Modéliser la structure : Cette étape nécessite la détermination des caractéristiques de la structure ainsi que le choix des degrés de liberté à considérer.

3. Calculer la réponse de la structures au chargement en choisissant les méthodes appropriées.
4. Interpréter les résultats du calcul en prenant en compte le comportement du système physique réel.

Chapitre 2

Systemes à un degré de liberté

2.1 Formulation de l'équation de mouvement

L'objectif de l'étude dynamique d'une structure est de déterminer sa réponse temporelle à un chargement dynamique. Pour pouvoir écrire les expressions mathématiques qui définissent le mouvement d'une structure physique (équations de mouvement), il est indispensable de passer par un modèle mathématique qui reflète au mieux le comportement de la structure en vue d'obtenir des résultats satisfaisants.

2.1.1 Modélisation : modèle dynamique élémentaire

Le modèle élémentaire masse-ressort de la figure 2.1 permet de représenter les caractéristiques d'une structure à 1ddl élastique linéaire soumise à des charges dynamiques.

Rappel : linéaire pour la proportionnalité entre effort et déplacement induit, ou entre contrainte et déformation, et élastique pour la réversibilité de la déformation, c-à-d retour à la position initiale après suppression de la force.

Le modèle doit représenter l'ensemble des caractéristiques du système réel qui se résume comme suit :

- Modèle masse-ressort*
- La masse \longrightarrow Bloc rigide indéformable de masse m
 - Les propriétés élastiques \longrightarrow Ressort sans masse de rigidité k
 - Mécanisme de déperdition d'énergie \longrightarrow Amortisseur (dash-pot) de constante c
 - Source extérieure d'excitation \longrightarrow Charge dynamique $P(t)$.

L'unique possibilité de mouvement d'un tel système est le déplacement horizontal $v(t)$, il définit complètement la position de la masse m à tout instant t . Quelque soit le

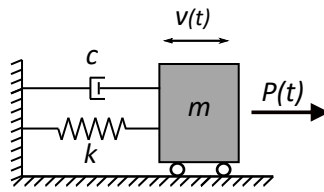


FIGURE 2.1 – Modèle élémentaire masse-ressort

système réel étudié, s'il peut être modélisé par un système à un seul degré de liberté (1ddl), il peut être représenté par le modèle élémentaire masse-ressort de la figure 2.1. La différence qu'il peut y avoir entre les systèmes réside dans la détermination des caractéristiques équivalentes, notamment celles liées à la rigidité.

Rappels sur la rigidité

En dynamique, le terme "rigidité" conserve la même définition qu'en statique. Prenons l'exemple de la poutre console de la figure 2.2, de module d'élasticité E , de section $a \times b$, et de longueur L .

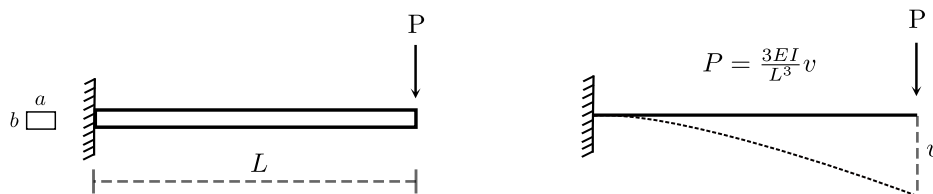


FIGURE 2.2 – Rigidité latérale d'une console - force appliquée à l'extrémité

Si on applique une force latérale P (perpendiculaire à l'axe de la poutre) à l'extrémité libre, le déplacement latéral v de cette extrémité est relié à la force par :

$$P = kv$$

C'est la constante k qu'on appelle rigidité latérale, $k = \frac{P}{v}$. On peut démontrer que dans ce cas, l'expression de k est donnée par :

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

I : est le moment d'inertie (moment quadratique) de la section de la poutre, $I = \frac{ab^3}{12}$.

En déplaçant le point d'application de la force P à une distance h de l'encastrement (figure 2.3), la rigidité latérale devient :

$$k = \frac{3EI}{h^3}$$

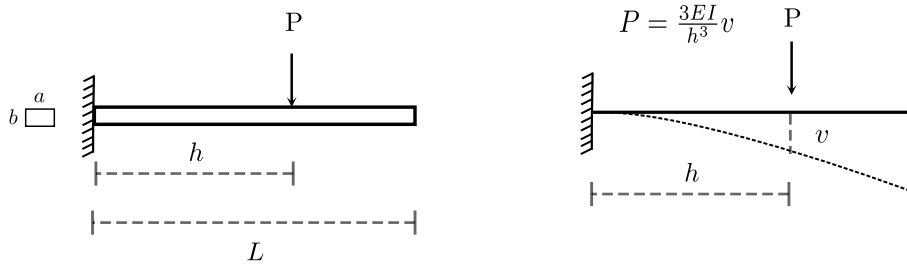


FIGURE 2.3 – Rigidité latérale d’une console- force appliquée en travée

Reprenons la même poutre mais en lui appliquant cette fois-ci une force axiale à l’extrémité libre (figure 2.4).

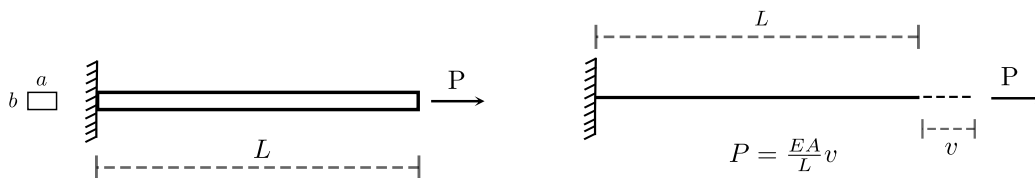


FIGURE 2.4 – Rigidité axiale d’une console

Même si on a changé la direction de la force, la rigidité reste le rapport entre la force appliquée P (force axiale) et le déplacement induit v , qui représente l’allongement de la poutre (ΔL).

$$P = k\Delta L = kv$$

Dans ce cas l’expression de la rigidité axiale est donnée par :

$$k = \frac{EA}{L}$$

$A = a \times b$: est la section de la poutre.

La rigidité d’une poutre simplement appuyée (figure 2.5), subissant une force verticale à son milieu, est le rapport entre la force P et le déplacement v à mi-travée.

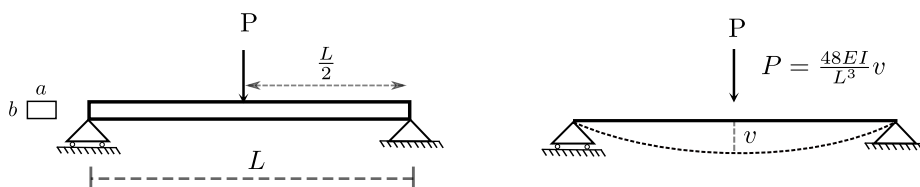


FIGURE 2.5 – Rigidité d’une poutre simplement appuyée

On peut démontrer que l’expression de k est donnée par :

$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

On peut définir la rigidité (k) comme étant la force (statique) nécessaire pour induire un déplacement unitaire. Elle dépend de la géométrie de la structure, du module d'élasticité, de la direction de la force appliquée, du point d'application de la force et des conditions d'appuis.

Rigidité équivalente

Représenter un système à 1ddl par le modèle masse-ressort, revient à le représenter avec une seule masse (la masse équivalente de tout le système), une seule rigidité (la rigidité équivalente de tout le système) et un seul amortissement (l'amortissement équivalent de tout le système).

Rappelons la rigidité équivalente des ressorts en parallèle à travers l'exemple à deux ressorts de la figure 2.6.

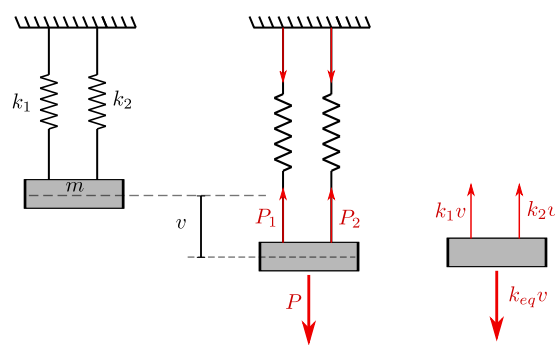


FIGURE 2.6 – Rigidité équivalente de ressorts en parallèle

L'équilibre des forces s'écrit :

$$P = P_1 + P_2$$

Les ressorts ont le même déplacement v que celui de la masse m , les forces du système s'écrivent alors comme suit :

$$P = k_{eq}v, \quad P_1 = k_1v \quad \text{et} \quad P_2 = k_2v$$

ce qui donne :

$$k_{eq}v = k_1v + k_2v$$

d'où :

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

Pour généraliser, la rigidité équivalente de n ressorts en parallèle est la somme des rigidités des ressorts.

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

Pour les ressorts placés en série, prenons l'exemple de deux ressorts de la figure 2.7.

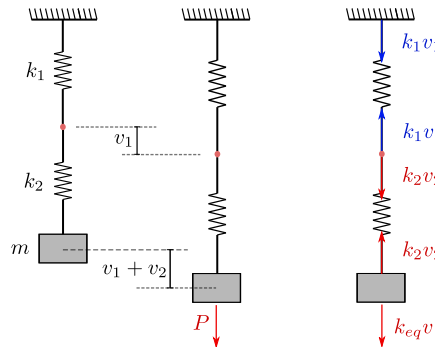


FIGURE 2.7 – Rigidité équivalente de ressorts en série

L'équilibre des forces dans le système conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} k_1 v_1 = k_{eq} v & \Rightarrow & v_1 = \frac{k_{eq}}{k_1} v \\ k_2 v_2 = k_{eq} v & \Rightarrow & v_2 = \frac{k_{eq}}{k_2} v \end{cases}$$

Le déplacement de la masse est égal à la somme des déplacements des deux ressorts.

$$v = v_1 + v_2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{k_{eq}}{k_1} v + \frac{k_{eq}}{k_2} v$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

On peut déduire que pour n ressorts en série la rigidité équivalente s'écrit :

$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

Exemple 1 : Soit le portique de la figure 2.8, la poutre de masse m est infiniment rigide, et l'unique possibilité de mouvement du système est le déplacement horizontal de la masse.

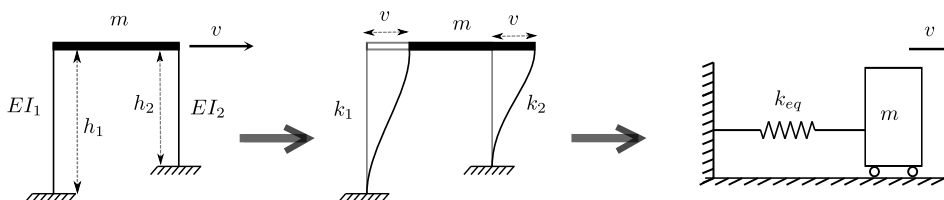


FIGURE 2.8 – Rigidité équivalente d'un portique

Un tel système peut être représenté par le modèle masse-ressort à 1ddl. Il suffit de trouver la rigidité équivalente de tout le portique. Lorsque la masse se déplace, les

deux poteaux se déforment en ayant le même déplacement à leurs extrémités supérieures; en terme de rigidité, ils sont en parallèle, donc la rigidité équivalente de tout le portique est la somme des rigidités des poteaux.

$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2} \quad \text{avec :} \quad k_1 = \frac{12EI_1}{h_1^3} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{12EI_2}{h_2^3}$$

Remarque : Les poteaux sont encastres à la base, et le fait que la poutre soit infiniment rigide permet de considérer la jonction poteau-poutre comme un encastrement. Trouver la rigidité de chaque poteau revient donc à déterminer la rigidité d'une poutre bi-encastree subissant un déplacement d'appui à son extrémité (figure 2.9). On peut démontrer que cette rigidité est $k = \frac{12EI}{L^3}$

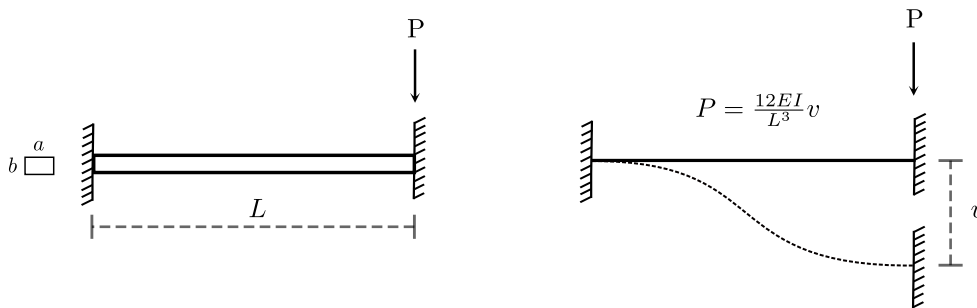


FIGURE 2.9 – Rigidité latérale d'une console bi-encastree

Exemple 2 : Soit le système représenté sur la figure 2.10, l'unique possibilité de mouvement est le déplacement vertical de la masse m . Trouver le système équivalent à 1 ddl revient à déterminer la rigidité équivalente de tout le système.

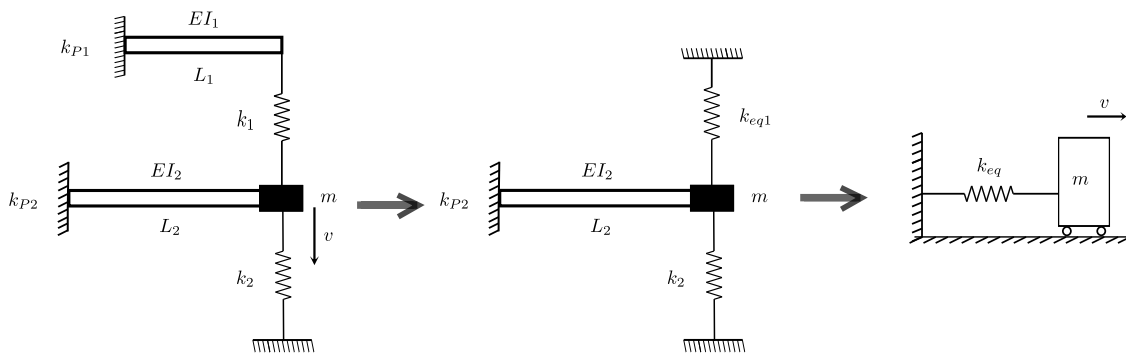


FIGURE 2.10 – Rigidité équivalente

La poutre k_{P1} et le ressort k_1 sont en série (le déplacement de la masse est égal à la somme de leurs déplacements), d'où leur rigidité équivalente :

$$\frac{1}{k_{eq1}} = \frac{1}{k_{P1}} + \frac{1}{k_1} \quad \Rightarrow \quad k_{eq1} = \frac{k_{P1}k_1}{k_{P1} + k_1}$$

Les éléments k_{eq1} , k_{P2} , et k_2 ont le même déplacement (celui de la masse), ils sont donc en parallèle, d'où la rigidité équivalente de tout le système

$$k_{eq} = k_{eq1} + k_{P2} + k_2$$

avec : $k_{P1} = \frac{3EI_1}{L_1^3}$ et $k_{P2} = \frac{3EI_2}{L_2^3}$

2.1.2 Équation de mouvement

Une fois la modélisation faite, le système à 1ddl peut être représenté par le modèle masse-ressort. Les forces qui agissent sur la masse m sont : la force extérieure $P(t)$, la force élastique qui se développe dans le ressort $f_s(t)$, la force d'amortissement $f_D(t)$ et la force d'inertie $f_I(t)$ (figure 2.11).

Pour écrire l'équation de mouvement, il suffit de considérer un sens du mouvement

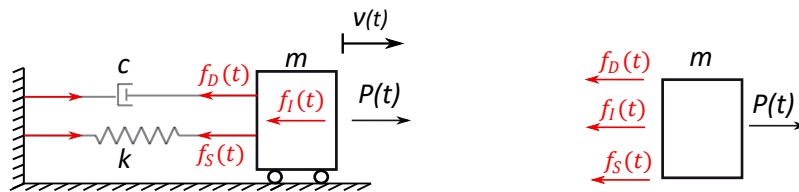


FIGURE 2.11 – Modèle masse-ressort : Équilibre des forces

puis d'écrire l'équilibre des forces (figure 2.11), ce qui donne :

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = P(t) \quad (2.1)$$

- La force d'inertie s'exprime, selon le principe de d'Alembert, par le produit de la masse m et de l'accélération $\ddot{v}(t)$.

$$f_I(t) = m\ddot{v}(t)$$

- La force élastique (force de rappel) est le produit de la rigidité k et du déplacement de la masse $v(t)$. Le comportement du système étant considéré élastique linéaire, cette force traduit la proportionnalité entre l'effort appliqué à la masse et le déplacement induit.

$$f_S(t) = kv(t)$$

- En considérant un amortissement visqueux, la force d'amortissement s'exprime par le produit de la constante d'amortissement c et de la vitesse de la masse $\dot{v}(t)$.

$$f_D(t) = c\dot{v}(t)$$

L'équation de mouvement d'un système à 1ddl s'écrit alors :

$$\boxed{m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P(t)} \quad (2.2)$$

2.1.3 Effets des forces de la pesanteur (gravité)

Pour faire intervenir les forces de gravité, considérons le modèle masse-ressort dans la direction verticale, en supposant que l'unique possibilité de mouvement du système est le déplacement vertical de la masse (figure(2.12a)). On laisse le système se stabiliser sous l'effet du poids qu'on appellera w . Le déplacement induit v_{st} est purement statique, il représente l'allongement du ressort.

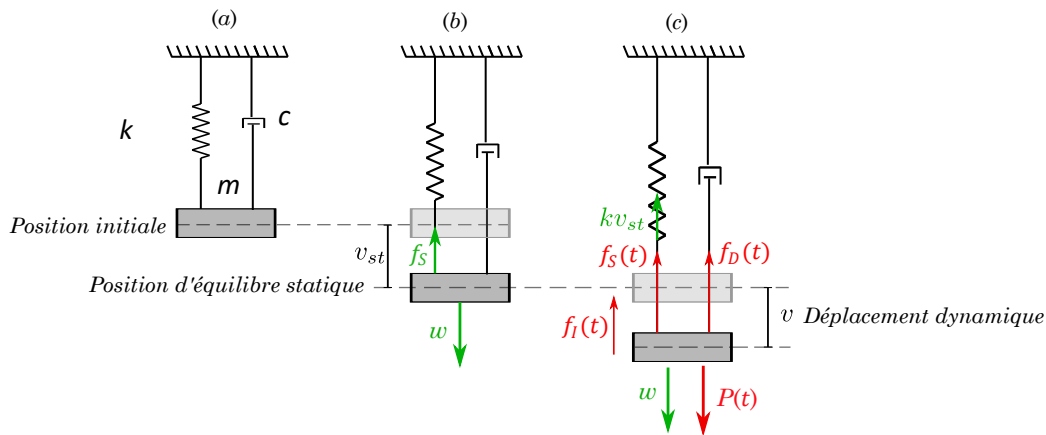


FIGURE 2.12 – Effet du poids

Le poids est équilibré par la tension dans le ressort (force élastique), l'équation d'équilibre s'écrit alors comme suit :

$$f_s = w \implies \boxed{kv_{st} = w}$$

La position actuelle de la masse est appelée position d'équilibre statique (figure(2.12b)). On applique maintenant la force dynamique $P(t)$, les déplacements induits à partir de la position d'équilibre statique représentent alors des déplacements $v(t)$ purement dynamiques (figure(2.12c)). L'équilibre des forces fait intervenir la force extérieure $P(t)$ et les forces, élastique $f_s(t)$, d'inertie $f_I(t)$ et d'amortissement $f_D(t)$, induites par le déplacement dynamique en plus du poids w et la force élastique kv_{st} . L'équation de mouvement s'écrit dans ce cas comme suit :

$$f_I(t) + f_D(t) + f_s(t) + f_s = w + P(t)$$

En exprimant chaque force par son expression, on obtient :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) + \cancel{kv_{st}} = w + P(t)$$

Sachant que $kv_{st} = w$, l'équation devient :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P(t)$$

Il est clair que cette équation ne fait pas intervenir le poids, ce qui permet de conclure que si on considère l'état initial de la structure comme étant la position d'équilibre statique, l'équation de mouvement induite ne fait intervenir que les forces dynamiques. La solution de cette équation donne le déplacement dynamique $v(t)$ qui peut être ajouté au déplacement statique v_{st} calculé dans une première étape pour fournir le déplacement global, cette superposition n'est possible que sous l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire.

Dans le cadre de ce cours, nous considérons toujours que les structures se sont déjà stabilisées sous l'effet de toutes les forces statiques qui leur sont appliquées (y compris le poids), dans ce cas l'équation de mouvement ne fait intervenir que les forces dynamiques et la solution donne le déplacement dynamique.

2.1.4 Vibrations dues à un mouvement à la base : Excitation d'appuis

Considérons un portique à un niveau soumis à un mouvement à sa base. Une telle excitation peut être provoquée par un séisme sur une construction. En considérant la poutre infiniment rigides et les poteaux indéformables dans la direction axiale, le portique peut être représenté par un modèle simplifié équivalent à un degré de liberté représenté par une masse m et une colonne de rigidité k , ou bien par le modèle masse-ressort. (figure 2.13)

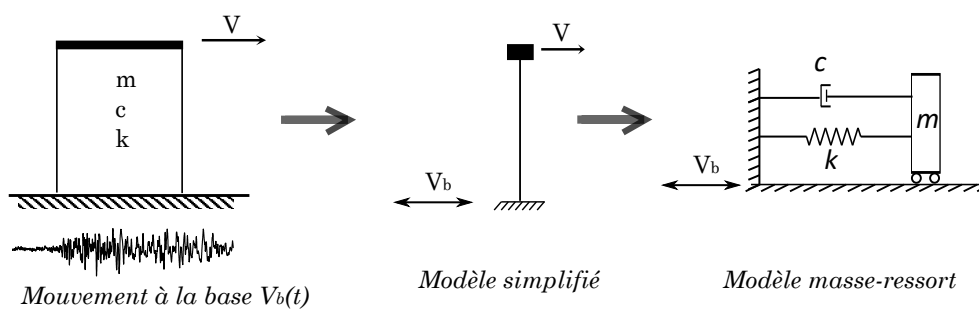


FIGURE 2.13 – Portique soumis à un mouvement à la base

Le déplacement total (absolu) de la masse $v_t(t)$ est la somme du déplacement de la base $v_b(t)$ et du déplacement relatif $v(t)$ dû à la déformation des poteaux, tel que montré sur la figure 2.14

$$v_t(t) = v_b(t) + v(t)$$

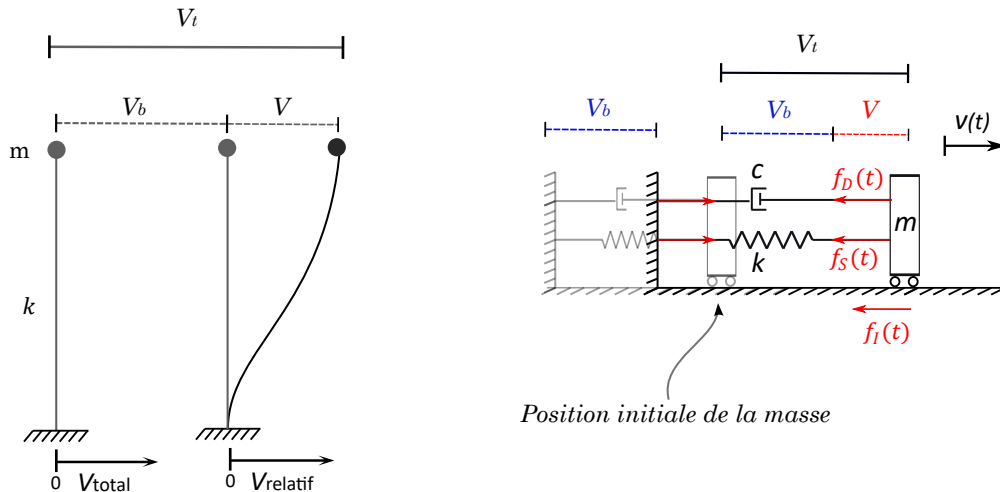


FIGURE 2.14 – Déplacement à la base d'un portique

Même si le système est forcé, l'expression de la force n'est pas donnée de manière explicite, elle est induite par le déplacement appliqué à la base. L'équation de mouvement s'écrit dans ce cas comme suit :

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = 0 \quad (2.3)$$

Exprimons chaque force par son expression :

$$f_I(t) = m\ddot{v}_t(t)$$

$$f_S(t) = kv(t)$$

$$f_D(t) = c\dot{v}(t)$$

En remplaçant dans l'équation 2.3, on obtient :

$$\begin{aligned} m\ddot{v}_t(t) + kv(t) + c\dot{v}(t) &= 0 \\ \Rightarrow m(\ddot{v}_b(t) + \ddot{v}(t)) + kv(t) + c\dot{v}(t) &= 0 \\ \Rightarrow m\ddot{v}_b(t) + m\ddot{v}(t) + kv(t) + c\dot{v}(t) &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{m\ddot{v}(t) + kv(t) + c\dot{v}(t) = -m\ddot{v}_b(t)} \end{aligned}$$

L'équation de mouvement d'un système à 1ddl soumis à un mouvement à sa base s'écrit sous la forme :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P(t) \quad \text{avec} \quad P(t) = -m\ddot{v}_b(t) \quad (2.4)$$

C'est l'équation de mouvement d'un système à 1ddl dont la masse subit une force $P(t) = -m\ddot{v}_b(t)$. La solution de cette équation donne $v(t)$ le déplacement relatif de la

masse.

On peut réécrire l'équation 2.4 en fonction du déplacement total (absolu) en exprimant le déplacement relatif par : $v(t) = v_t(t) - v_b(t)$ et on obtient :

$$m\ddot{v}_t(t) + c\dot{v}_t(t) + kv_t(t) = c\dot{v}_b(t) + kv_b(t) = P(t) \quad (2.5)$$

L'équation 2.5 représente l'équation de mouvement d'un système à 1ddl soumis à une force $P(t) = c\dot{v}_b(t) + kv_b(t)$ appliquée sur la masse. La solution de cette équation donne $v_t(t)$ le déplacement total (absolu) de la masse.

2.2 Vibrations libres

L'équation de mouvement d'un système à 1ddl, de masse m , de constante d'amortissement c , et de rigidité k subissant une force extérieure $P(t)$ s'écrit comme suit :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P(t)$$

En absence de force extérieure agissant sur le système, $P(t) = 0$, les vibrations sont dites libres. Elles ne dépendent que des conditions initiales, le déplacement initial $v(0)$ et la vitesse initiale $\dot{v}(0)$.

2.2.1 Vibrations libres non amorties

En absence d'amortissement, l'équation du mouvement libre s'écrit comme suit :

$$m\ddot{v}(t) + kv(t) = 0 \quad (2.6)$$

En divisant par la masse m , l'équation 2.6 s'écrit :

$$\ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0 \quad (2.7)$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre du système à 1ddl, elle représente la vitesse angulaire et son unité est le radian par seconde $\left[\frac{rd}{s}\right]$. Elle est reliée à la période propre T et à la fréquence propre f .

La période propre du système $T = \frac{2\pi}{\omega}$ qui s'exprime en secondes [s] représente le temps nécessaire à l'oscillateur pour effectuer un cycle de vibration.

La fréquence propre du système $f = \frac{1}{T}$ d'unité $[s^{-1}]$ ou [Hz], représente le nombre de cycles effectués par l'oscillateur en une seconde.

Le terme "propre" signifie que les paramètres (ω , T , et f) ne dépendent que des caractéristiques propres de la structure, à savoir, la masse et la rigidité.

La solution de l'équation 2.7 est donnée en fonction des constantes G et s , sous la forme suivante :

$$v(t) = Ge^{st} \quad (2.8)$$

En la remplaçant dans l'équation 2.7 on obtient :

$$\begin{aligned} (s^2 + \omega^2)Ge^{st} &= 0 \\ \implies s^2 + \omega^2 &= 0 \quad (\text{l'équation caractéristique}) \\ \implies s &= \pm i\omega \end{aligned}$$

L'équation caractéristique admet deux solutions : $s_1 = i\omega$ et $s_2 = -i\omega$, d'où la solution de l'équation de mouvement :

$$v(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t}$$

G_1 et G_2 sont deux constantes complexes.

Sachant que :

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

On peut finalement écrire la solution de la forme :

$$\boxed{v(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t} \quad (2.9)$$

ou bien de la forme :

$$\boxed{v(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)} \quad (2.10)$$

A et B sont des constantes réelles qui dépendent des conditions initiales : $v(0)$ et $\dot{v}(0)$. ρ et θ représentent l'amplitude du mouvement (la valeur maximale du déplacement) et le déphase, respectivement.

En remplaçant t par 0 dans l'équation 2.9, on trouve :

$$B = v(0)$$

Puis on dérive l'équation 2.9

$$\dot{v}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

et on remplace t par 0, pour trouver :

$$A = \frac{\dot{v}(0)}{\omega}$$

En exploitant l'identité trigonométrique

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

on obtient ρ et θ :

$$\begin{aligned} v(t) &= \rho \cos(\omega t - \theta) = \rho \cos \omega t \cos \theta + \rho \sin \omega t \sin \theta \\ &= \underbrace{\rho \sin \theta}_{A} \sin \omega t + \underbrace{\rho \cos \theta}_{B} \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \rho \sin \theta \\ B = \rho \cos \theta \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{A^2 + B^2} & \Rightarrow & \rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}(0)}{\omega}\right)^2 + (v(0))^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) & \Rightarrow & \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{v}(0)}{\omega v(0)}\right) \end{cases}$$

L'expression du déplacement d'un système à 1ddl non amorti s'écrit :

$$\boxed{v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin \omega t + v(0) \cos \omega t} \quad (2.11)$$

La figure 2.15 présente l'évolution du déplacement lors de vibrations libres non amorties pour les conditions initiales : $v(0) > 0$ et $\dot{v}(0) > 0$.

2.2.2 Vibrations libres amorties

Lorsqu'un système à 1ddl est amorti, son équation de mouvement libre s'écrit comme suit :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0 \quad (2.12)$$

En divisant par la masse m , l'équation 2.12 s'écrit :

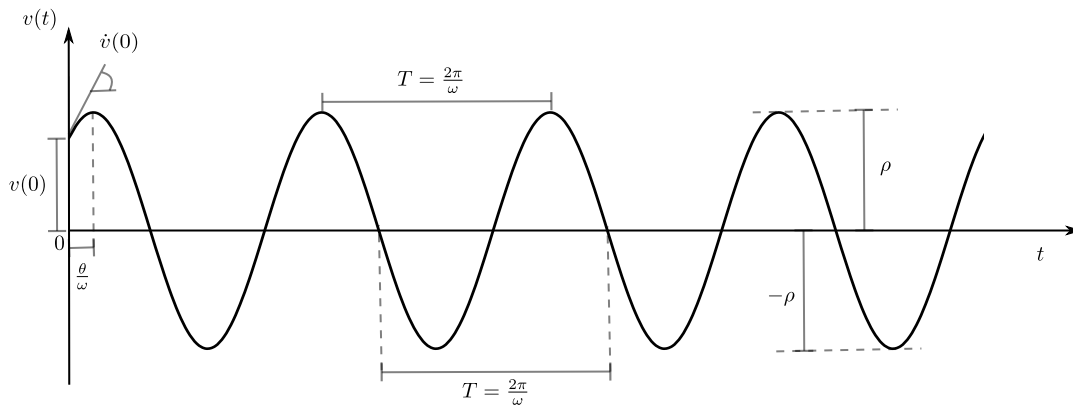


FIGURE 2.15 – Vibrations libres non amorties

$$\ddot{v}(t) + \frac{c}{m}\dot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0 \quad (2.13)$$

La solution est donnée par l'équation 2.8, qui une fois remplacée dans l'équation 2.13 donne :

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (2.14)$$

Il faut d'abord trouver les racines de l'équation 2.14, appelée "équation caractéristique" pour trouver la forme de la solution.

le discriminant Δ de l'équation 2.14 :

$$\Delta = \left(\frac{c}{m}\right)^2 - (2\omega)^2$$

La solution dépend de Δ qui peut être nulle, positif ou négatif, trois cas sont donc possibles. Dans ce qui suit nous allons explorer ces cas et donner à chaque fois comment réagit le système physiquement.

1^{er} cas : $\Delta = 0$: Système à amortissement critique

$$\Delta = 0 \implies \frac{c}{m} = 2\omega \implies c = 2m\omega$$

Dans ce cas, le système possède un amortissement tel que la constante d'amortissement est égale à la quantité $2m\omega$, qu'on appelle amortissement critique c_{cr} .

$$c_{cr} = 2m\omega$$

Le rapport entre l'amortissement c et l'amortissement critique c_{cr} est appelé taux d'amortissement critique ξ .

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.15)$$

On est dans le cas où $c = c_{cr}$, c-à-d $\xi = 1$, qu'on exprime aussi en pourcentage ($\xi = 100\%$).

Puisque $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique (2.14) n'admet qu'une seule solution :

$$s = -\frac{c}{2m} = -\omega$$

et la solution de l'équation de mouvement 2.13 s'écrit :

$$v(t) = (G_1 + G_2 t)e^{-\omega t} \quad (2.16)$$

G_1 et G_2 dépendent des conditions initiales $v(0)$ et $\dot{v}(0)$. En remplaçant $t = 0$ dans l'équation 2.16, on trouve :

$$G_1 = v(0)$$

En dérivant l'équation 2.16, puis en remplaçant t par 0, on trouve :

$$\dot{v}(t) = G_2 e^{-\omega t} - \omega e^{-\omega t} (G_1 + G_2 t) \implies \dot{v}(0) = G_2 - \omega G_1$$

et

$$G_2 = \dot{v}(0) + \omega v(0)$$

L'expression du déplacement en fonction des conditions initiales devient :

$$v(t) = [v(0) + (\dot{v}(0) + \omega v(0))t]e^{-\omega t} \quad (2.17)$$

Pour bien comprendre ce qui arrive lorsque un système doté d'un amortissement critique est soumis à un déplacement initial et/ou une vitesse initiale, schématisons sur la figure 2.16 la réponse en déplacement donnée par l'équation 2.17.

Il est clair qu'aucune oscillation autour de la position du déplacement nul n'est observée. Un tel système est tellement amorti que lorsque la masse est déplacée, elle ne fait que revenir à sa position initiale sans jamais la franchir.

On peut maintenant définir l'amortissement critique comme étant la valeur minimale de l'amortissement pour laquelle aucune oscillation ne peut s'effectuer.

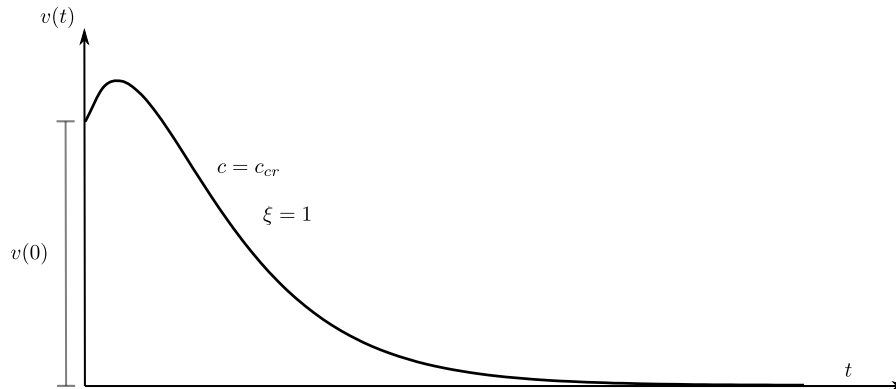


FIGURE 2.16 – Vibrations libres - Amortissement critique

2^{ème} cas : $\Delta < 0$: Système sous-amorti

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\implies \frac{c}{m} < 2\omega \\ &\implies c < 2m\omega \\ &\implies c < c_{cr} \\ &\implies \xi < 1 \end{aligned}$$

Dans ce cas l'équation caractéristique 2.14 admet deux racines complexes :

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

on réécrit ces solutions en fonction du taux d'amortissement ξ . A partir de l'équation 2.15, on a $c = \xi c_{cr} = \xi 2m\omega$, ce qui donne

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\xi\omega \pm \sqrt{(\omega\xi)^2 - \omega^2} \\ &= -\xi\omega \pm \sqrt{\omega^2(\xi^2 - 1)} \\ &= -\xi\omega \pm \sqrt{-\omega^2(1 - \xi^2)} & i = \sqrt{-1} \\ &= -\xi\omega \pm \sqrt{i^2\omega^2(1 - \xi^2)} \\ &= -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1 - \xi^2} \\ &= -\xi\omega \pm i\omega_D \end{aligned}$$

On appelle $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ la pulsation amortie.

L'équation de mouvement peut aussi s'écrire :

$$\boxed{\ddot{v}(t) + 2\xi\omega\dot{v}(t) + \omega^2v(t) = 0} \quad (2.18)$$

La solution de l'équation de mouvement est dans ce cas exprimée par :

$$\begin{aligned} v(t) &= G_1 e^{s_1 t} + G_2 e^{s_2 t} \\ &= G_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_D)t} + G_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_D)t} \\ &= e^{-\xi\omega t} [G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}] \end{aligned}$$

On peut écrire l'expression du déplacement sous la forme :

$$\boxed{v(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t]} \quad (2.19)$$

A et B sont des constantes réelles qui dépendent des conditions initiales.

En remplaçant $t = 0$ dans $v(t)$ on trouve :

$$B = v(0)$$

et en remplaçant $t = 0$ dans $\dot{v}(t)$ on trouve :

$$A = \frac{\dot{v}(0) + \xi\omega v(0)}{\omega_D}$$

d'où l'expression du déplacement en fonction des conditions initiales :

$$\boxed{v(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{v}(0) + \xi\omega v(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t + v(0) \cos \omega_D t \right]} \quad (2.20)$$

La réponse en déplacement peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\boxed{v(t) = e^{-\xi\omega t} \rho \cos(\omega_D t - \theta)} \quad (2.21)$$

avec

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}(0) + \xi\omega v(0)}{\omega_D} \right)^2 + (v(0))^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{A}{B} \right) \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{v}(0) + \xi\omega v(0)}{\omega_D v(0)} \right)$$

L'expression du déplacement est schématisée sur la figure 2.17. On remarque que le mouvement est oscillatoire décroissant. Lorsque l'amortissement d'un système est inférieur à l'amortissement critique ($\xi < 1$) on dit qu'il est sous-amorti. C'est le cas des structures de génie civil, car le taux d'amortissement critique est généralement limité à 0.2 ($\xi \leq 20\%$).

Lorsque un système à 1ddl sous-amorti ($\xi < 1$) est mis en vibrations libres sa pulsation amortie ω_D est légèrement inférieure à la pulsation propre ω .

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} < \omega$$

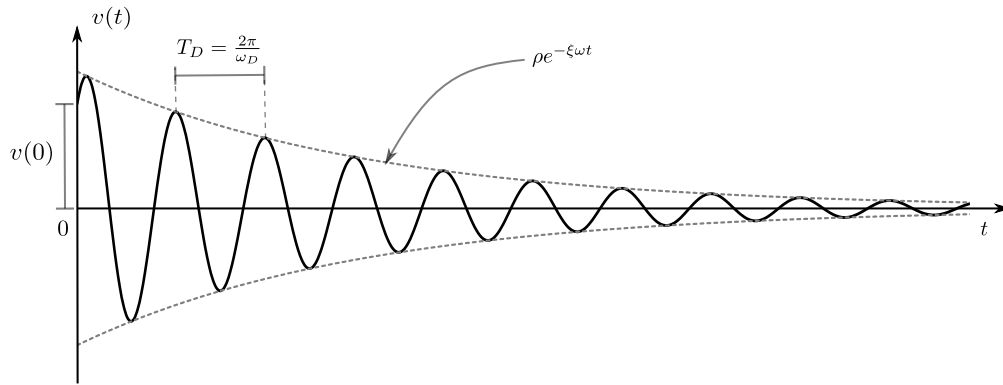


FIGURE 2.17 – Vibrations libres amorties - Système sous-amorti

Quant à sa période amortie T_D , elle est légèrement supérieure à sa période propre T .

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{d'où} \quad T_D > T$$

Sur la figure 2.18, on peut comparer les expressions du déplacement en vibrations libres d'un système à 1ddl de caractéristiques $T = 0.5s$, et $\xi = 5\%$ avec et sans amortissement. Les conditions initiales de l'exemple sont : $v(0) = 3cm$ et $\dot{v}(0) = 30cm/s$. On remarque que pour un taux d'amortissement critique de 5%, il y a très peu de différence entre la période propre et la période amortie. Aussi la valeur maximale du déplacement est peu affectée par l'amortissement.

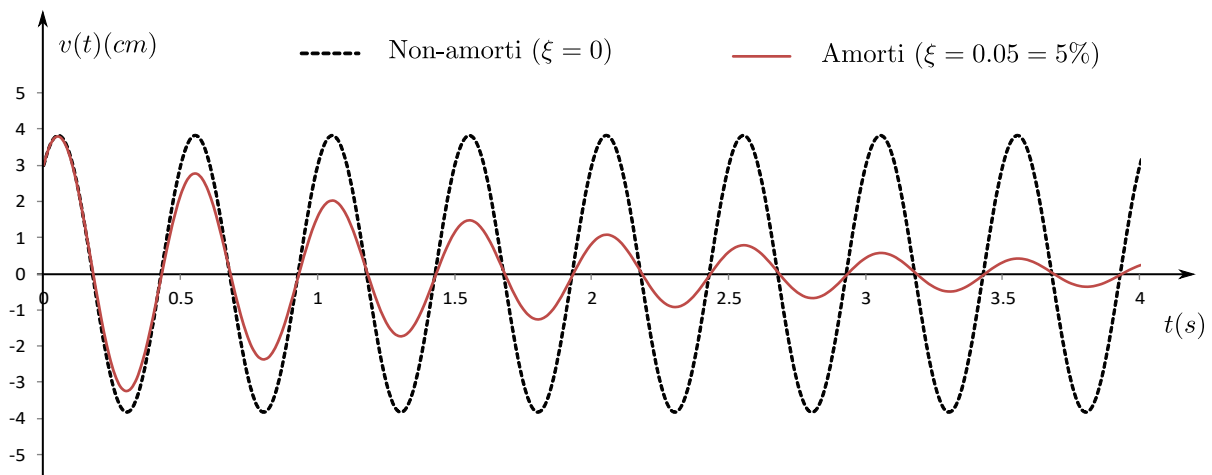


FIGURE 2.18 – Vibrations libres avec et sans amortissement

Pour un système sous-amorti, plus l'amortissement est grand plus l'atténuation des vibration est rapide, tel que montré sur l'exemple de la figure 2.19 où sont représentées les réponses d'un système de période $T = 0.5s$ pour différentes valeurs de ξ lors d'un test de vibrations libres avec $v(0) = 3cm$ et $\dot{v}(0) = 0$.

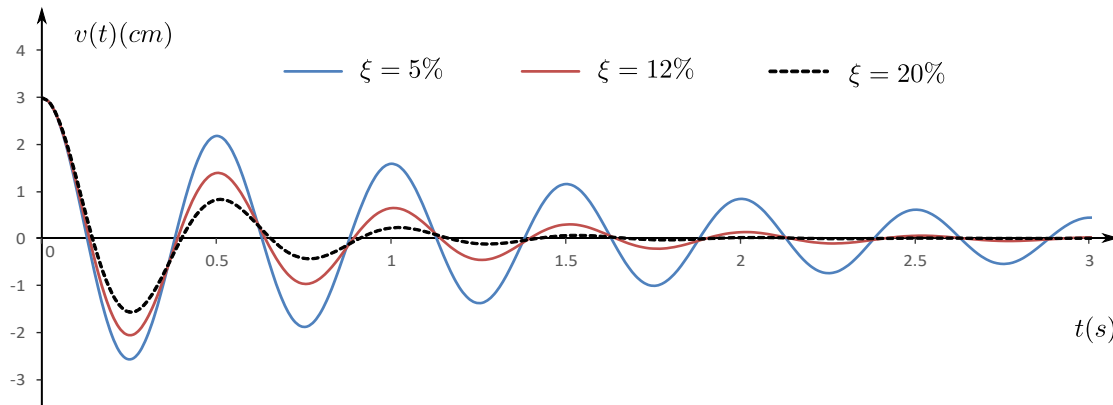


FIGURE 2.19 – Système sous-amorti sous différents amortissements

Taux d’amortissement critique ξ : Dans l’analyse des structures de génie civil, l’amortissement est exprimé au moyen du taux d’amortissement critique ξ , il représente la caractéristique de décroissance des oscillations dans les systèmes vibratoires. Pour le déterminer il suffit de faire un test de vibrations libres, c’est-à-dire, donner des conditions initiales aux système et le laisser vibrer librement sans intervention extérieure. L’estimation de ξ est faite moyennant le décrément logarithmique δ .

Décrément logarithmique δ : Prenons l’exemple de la réponse en vibrations libres d’un système à 1ddl sous-amorti, représenté sur la figure 2.20. Considérons deux pics successifs de déplacement v_n et v_{n+1} , ils montrent la décroissance de l’amplitude du mouvement après un cycle de vibration. Si v_n est atteint à l’instant t , alors v_{n+1} est atteint à l’instant $t + T_D$. le rapport entre les deux déplacements est :

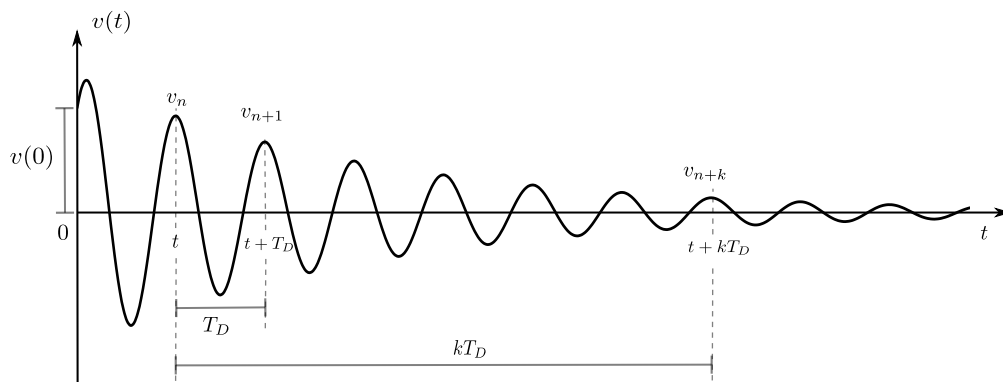


FIGURE 2.20 – Décrément logarithmique

$$\begin{aligned}\frac{v_n}{v_{n+1}} &= \frac{v(t)}{v(t+T_D)} = \frac{\rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)}{\rho e^{-\xi\omega(t+T_D)} \cos(\omega_D(t+T_D) - \theta)} \\ &= \frac{\rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)}{\rho e^{-\xi\omega t} e^{-\xi\omega T_D} \cos(\omega_D t - \theta + 2\pi)} \\ &= \frac{1}{e^{-\xi\omega T_D}} \\ &= e^{\xi\omega T_D} \\ &= e^{\xi\omega \frac{2\pi}{\omega_D}}\end{aligned}$$

Rappelons que $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$, alors

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

En prenant le logarithme népérien des deux membres, on trouve :

$$\ln \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \delta$$

δ est appelé *Décroissance logarithmique*, il peut être déterminé en connaissant deux amplitudes de déplacements ayant un cycle d'écart. L'amortissement peut ensuite être déduit :

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \implies \xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}$$

Pour augmenter la précision dans le calcul de δ , on peut utiliser deux pics de déplacements v_n et v_{n+k} séparés par un certain nombre de cycles k (k est un nombre entier). Si v_n est atteint à l'instant t , alors v_{n+k} est atteint à l'instant $t+kT_D$. Le rapport entre les deux déplacements est :

$$\begin{aligned}\frac{v_n}{v_{n+k}} &= \frac{v(t)}{v(t+kT_D)} = \frac{\rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)}{\rho e^{-\xi\omega(t+kT_D)} \cos(\omega_D(t+kT_D) - \theta)} \\ &= \frac{\rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)}{\rho e^{-\xi\omega t} e^{-\xi\omega k T_D} \cos(\omega_D t - \theta + 2k\pi)} \\ &= \frac{1}{e^{-\xi\omega k T_D}} \\ &= e^{\xi\omega k T_D} \\ &= e^{\xi\omega \frac{2k\pi}{\omega_D}}\end{aligned}$$

Prenons maintenant le logarithme népérien des deux membres

$$\ln \frac{v_n}{v_{n+k}} = \frac{2k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = k \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

sachant que $\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, on trouve :

$$\ln \frac{v_n}{v_{n+k}} = k\delta$$

On peut donc utiliser deux amplitudes séparées de k cycles pour calculer le décrement logarithmique.

$$\delta = \frac{1}{k} \ln \frac{v_n}{v_{n+k}}$$

3^{ème} cas : $\Delta > 0$: Système sur-amorti

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\implies \frac{c}{m} > 2\omega \\ &\implies c > 2m\omega \\ &\implies c > c_{cr} \\ &\implies \xi > 1 \end{aligned}$$

Remarque : Ce cas a peu d'intérêt dans le calcul dynamique des structures de génie civil, car l'amortissement du système dépasse l'amortissement critique qui est suffisant pour empêcher les vibrations d'avoir lieu. Nous n'allons développer ce cas que pour pouvoir le comparer aux deux cas précédents.

L'équation caractéristique 2.14 admet dans ce cas deux racines réelles :

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

on réécrit ces solutions en fonction du taux d'amortissement ξ .

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\xi\omega \pm \sqrt{(\omega\xi)^2 - \omega^2} \\ &= -\xi\omega \pm \sqrt{\omega^2(\xi^2 - 1)} \\ &= -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \\ &= -\xi\omega \pm \widehat{\omega} \end{aligned}$$

avec : $\widehat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$.

La solution de l'équation de mouvement est dans ce cas exprimée, en fonction des conditions initiales, par :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{v}(0) + \xi\omega v(0)}{\widehat{\omega}} \sinh \widehat{\omega} t + v(0) \cosh \widehat{\omega} t \right] \quad (2.22)$$

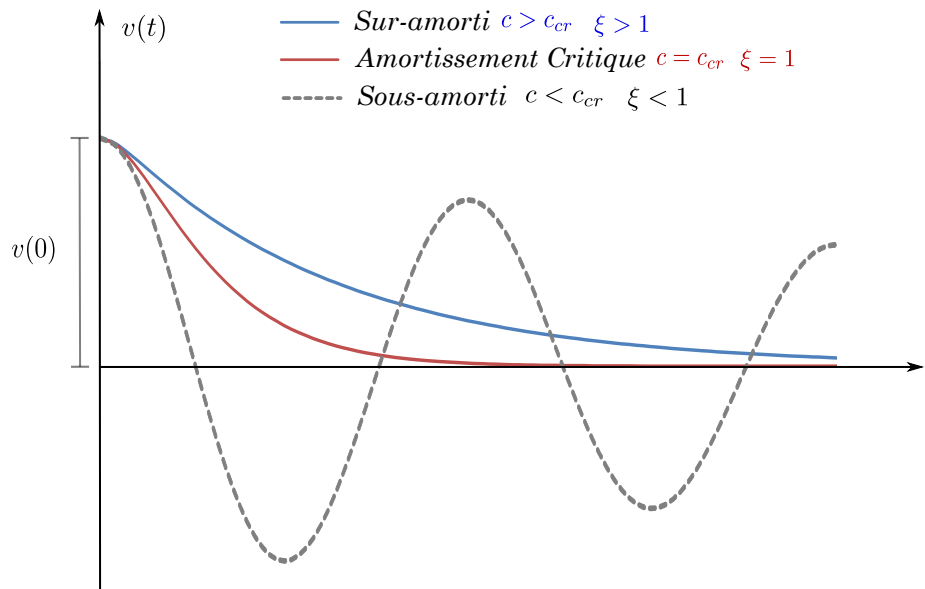


FIGURE 2.21 – Vibrations libres - Systèmes sur-amorti, à amortissement critique, et sous-amorti

Pour rappel : \sinh et \cosh sont des fonctions hyperboliques : $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
l'équation 2.22 est représentée sur la figure 2.21 pour les conditions initiales : $v(0) \neq 0$ et $\dot{v}(0) = 0$. Il est clair que le système ne peut pas effectuer de vibrations car il est trop amorti. Lorsque $\xi > 1$, le système est dit sur-amorti, comparativement à un système à amortissement critique, il est encore plus lent pour revenir à sa position initiale, et pour les mêmes conditions initiales, un système sous-amorti effectue des vibrations autour de la position de déplacement nul.

2.2.3 Applications

Application 1 : Un système à 1ddl de masse $m = 120$ tonnes et de rigidité $k = 8500$ KN/m est mis en vibrations libres avec un déplacement initial de 2 cm et une vitesse initiale de 25 cm/s. Calculer le déplacement de la masse à l'instant $t = 3$ s dans les cas suivants :

- 1^{er} cas : $c = 0$
- 2^{ème} cas : $c = 161592$ N.s/m.

Solution

Calculons d'abord la pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Attention à la compatibilité des unités de m et k , si k est en KN/m , alors m doit être en tonnes.

$$\omega = \sqrt{\frac{8500}{120}} = 8.416 \text{ rd/s}$$

1^{er} cas : $c = 0 \implies$ vibrations libres non-amorties

L'expression du déplacement s'écrit :

$$v(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

En fonction des conditions initiales :

$$v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin \omega t + v(0) \cos \omega t$$

AN :

$$v(t) = \frac{25}{8.416} \sin 8.416t + 2 \cos 8.416t \quad (\text{cm})$$

$$v(t) = 2.97 \sin 8.416t + 2 \cos 8.416t \quad (\text{cm})$$

$$\boxed{v(3s) = 2.328 \text{ cm}}$$

2^{ème} cas : $c = 161592 \text{ N.s/m} \implies$ vibrations libres amorties

Calculons le taux d'amortissement critique :

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega}$$

Attention à la compatibilité des unités de m et c , si m est en tonnes, alors c doit être en KN.s/m .

$$\xi = \frac{161.592}{2 \times 120 \times 8.416} = 0.08 = 8\%$$

ξ est nettement inférieur à 1, le système est donc sous-amorti et les vibrations vont avoir lieu. L'expression du déplacement s'écrit :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t]$$

En fonction des conditions initiales :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{v}(0) + \xi\omega v(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t + v(0) \cos \omega_D t \right]$$

AN :

$$\begin{aligned} \omega_D &= \omega \sqrt{1 - \xi^2} \\ &= 8.416 \sqrt{1 - 0.08^2} \end{aligned}$$

$$\omega_D = 8.389 \text{ rd/s}$$

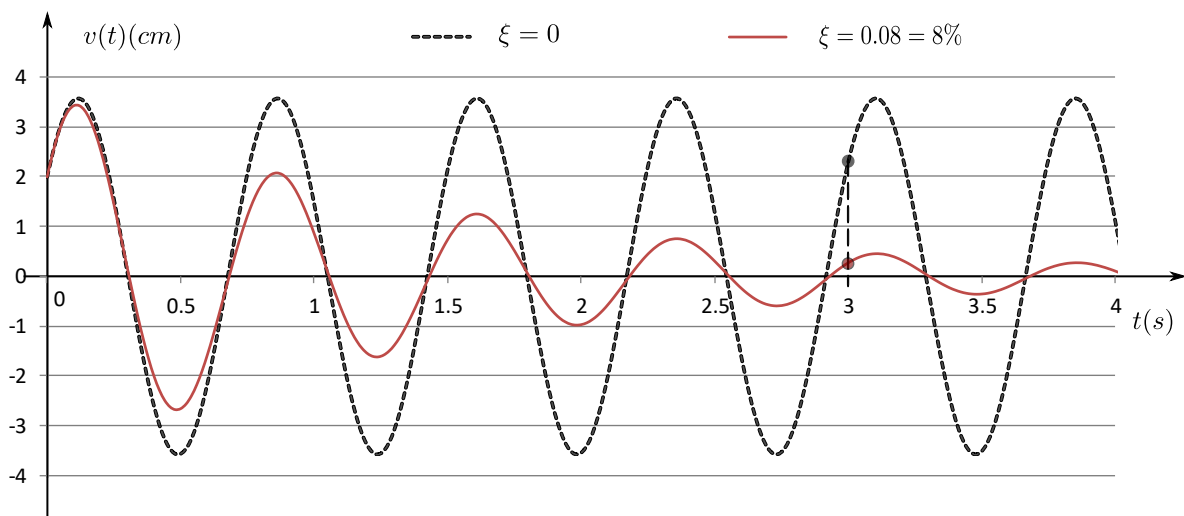
Attention : Dans un problème de vibrations libres, la précision doit être la plus élevée possible lors des calculs, particulièrement dans le calcul des caractéristiques propres (T et ω) et des caractéristiques amorties (T_D et ω_D). En effet, pour les structures étudiées en génie civil, les valeurs de ξ sont très petites, le manque de précision peut conduire à des valeurs identiques de T et T_D ou de ω et ω_D ce qui pourrait conduire à une valeur nulle pour l'amortissement alors qu'elle ne l'est pas.

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-0.08 \times 8.416t} \left[\frac{25 + 0.08 \times 8.416 \times 2}{8.389} \sin 8.389t + 2 \cos 8.389t \right] \text{ (cm)} \\ &= e^{-0.673t} [3.1406 \sin 8.389t + 2 \cos 8.389t] \text{ (cm)} \end{aligned}$$

d'où

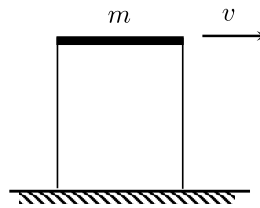
$$v(3s) = 0.279 \text{ cm}$$

Les expressions des déplacements dans les deux cas sont représentées sur la figure ci-dessous.



Application 2 : Soit le portique représenté sur la figure ci-dessous. La poutre de masse m est infiniment rigide et les poteaux sont sans masse. L'unique possibilité de mouvement du système est le déplacement horizontal de la poutre. Le taux d'amortissement du système est de 8%. Lors d'un test de vibrations libres, la poutre est déplacée latéralement puis relâchée à l'instant $t = 0$.

Sachant que l'amplitude du déplacement après deux cycles de vibration est $v_2 = 9.1187 \text{ mm}$ atteint à l'instant $t = 0.8828 \text{ s}$, Déterminer :



1. l'amplitude du mouvement après cinq cycles de vibrations (à partir de $t = 0$).
2. le nombre de cycles nécessaire pour que l'amplitude du mouvement passe de sa valeur initiale à la valeur 0.7326 mm .
3. les conditions initiales du test.
4. la période propre du système.

Solution

1. Connaissant de taux d'amortissement critique ξ , on peut calculer le décrément logarithmique δ

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.5043$$

Sachant que

$$\delta = \frac{1}{k} \ln \frac{v_n}{v_{n+k}}$$

Attention : k représente le nombre de cycles entre v_n et v_{n+k} . Alors si on utilise le déplacement après 2 cycles (v_2) pour trouver le déplacement après 5 cycles (v_5), dans ce cas $k = 3$ car il y a 3 cycles entre v_2 et v_5

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{3} \ln \frac{v_2}{v_5} \\ \Rightarrow 3\delta &= \ln \frac{v_2}{v_5} \\ \Rightarrow e^{3\delta} &= \frac{v_2}{v_5} \\ \Rightarrow v_5 &= \frac{v_2}{e^{3\delta}} \\ \Rightarrow v_5 &= \frac{9.1187}{e^{3 \times 0.5043}} \end{aligned}$$

d'où :

$$v_5 = 2.0086 \text{ mm}$$

2. le nombre de cycles nécessaire pour que l'amplitude du mouvement passe de sa valeur initiale à la valeur 0.7326 mm .

Pour répondre à cette question on peut utiliser v_2 ou bien v_5 .

En utilisant v_2 :

$$\begin{aligned}\delta = \frac{1}{k} \ln \frac{v_2}{0.7326} &\implies k = \frac{1}{\delta} \ln \frac{v_2}{0.7326} \\ &= \frac{1}{0.5043} \ln \frac{9.1187}{0.7326} \\ &\approx 4.999 = 5\end{aligned}$$

Attention : 5 est le nombre de cycles entre v_2 et 0.7326 mm

A partir de l'amplitude initiale, le nombre de cycles est égal à :

$$\boxed{5 + 2 = 7 \text{ cycles}}$$

En utilisant v_5 :

$$\begin{aligned}\delta = \frac{1}{k} \ln \frac{v_5}{0.7326} &\implies k = \frac{1}{\delta} \ln \frac{v_5}{0.7326} \\ &= \frac{1}{0.5043} \ln \frac{2.0086}{0.7326} \\ &\approx 1.999 = 2\end{aligned}$$

Attention : 2 est le nombre de cycles entre v_5 et 0.7326 mm

A partir de l'amplitude initiale, le nombre de cycles est égal à :

$$\boxed{2 + 5 = 7 \text{ cycles}}$$

3. Le fait de lâcher tout simplement la poutre à l'instant $t = 0$ veut dire qu'on a pas appliqué de vitesse initiale, d'où $\dot{v}(0) = 0$. Pour le déplacement initial $v(0) = v_0$, il représente l'amplitude initiale, car en absence de vitesse initiale, le déplacement initial est le déplacement maximal. On peut utiliser l'une des trois amplitudes connues v_2 , v_5 , ou v_7 (l'amplitude du déplacement après 7 cycles).

$$\begin{aligned}\delta = \frac{1}{2} \ln \frac{v_0}{v_2} &\implies v_0 = v_2 e^{2\delta} = 25.0012 \text{ mm} \\ \delta = \frac{1}{5} \ln \frac{v_0}{v_5} &\implies v_0 = v_5 e^{5\delta} = 25.0015 \text{ mm} \\ \delta = \frac{1}{7} \ln \frac{v_0}{v_7} &\implies v_0 = v_7 e^{7\delta} = 25.0017 \text{ mm}\end{aligned}$$

4. La période propre T

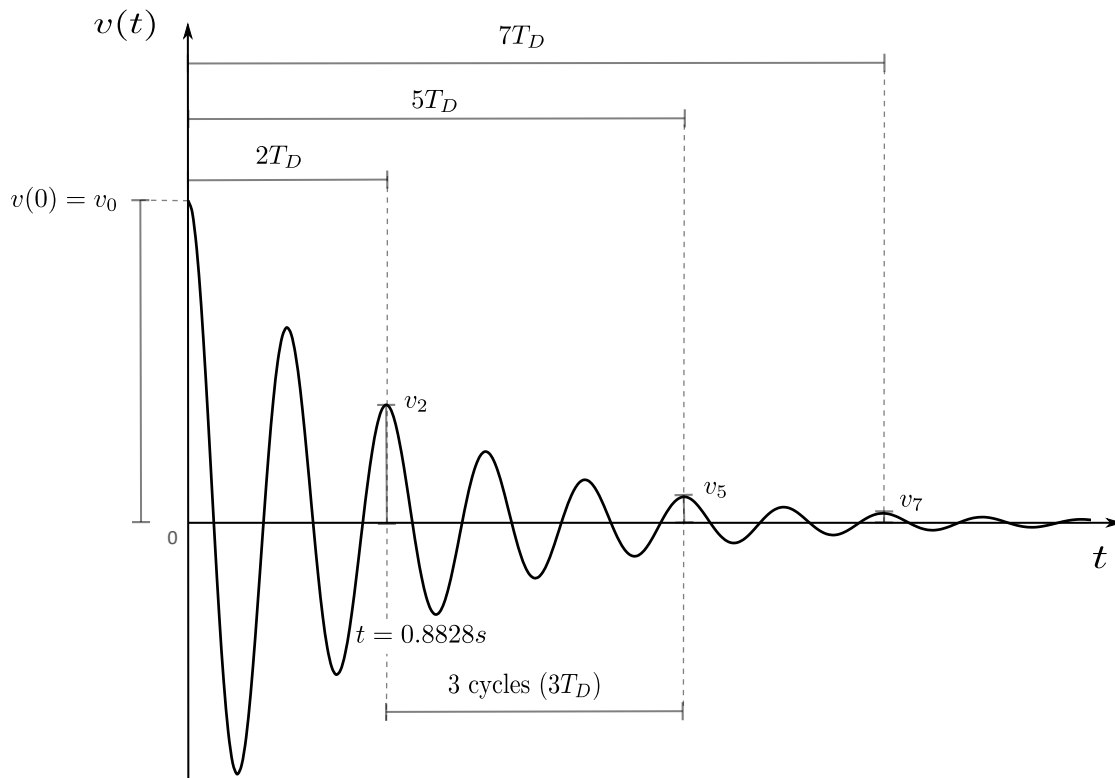
Le temps correspondant au déplacement v_2 après deux cycles représente 2 fois la période amortie, d'où

$$T_D = \frac{0.8828}{2} = 0.4414 \text{ s}$$

Sachant que $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$, on a :

$$T = T_D\sqrt{1 - \xi^2} = 0.4399 \text{ s}$$

Les éléments de réponse de l'application sont représentés sur la figure ci-dessous où est schématisée la variation du déplacement en fonction du temps.



Attention : Dans cette application, du fait que la vitesse initiale soit nulle, le déplacement maximal qui représente le premier pic (la première amplitude) correspond au déplacement initial, ce qui n'est pas le cas si la vitesse initiale n'est pas nulle (voir l'exemple de la figure 2.17.)

2.3 Vibrations forcées : Chargement harmonique

La force harmonique constitue une forme de chargement très présente dans le calcul dynamique des structures. Elle s'écrit sous la forme :

$$P(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t$$

P_0 est l'amplitude du chargement, $\bar{\omega}$ est la pulsation du chargement et $T_P = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$ est la période du chargement (voir la figure 2.22).

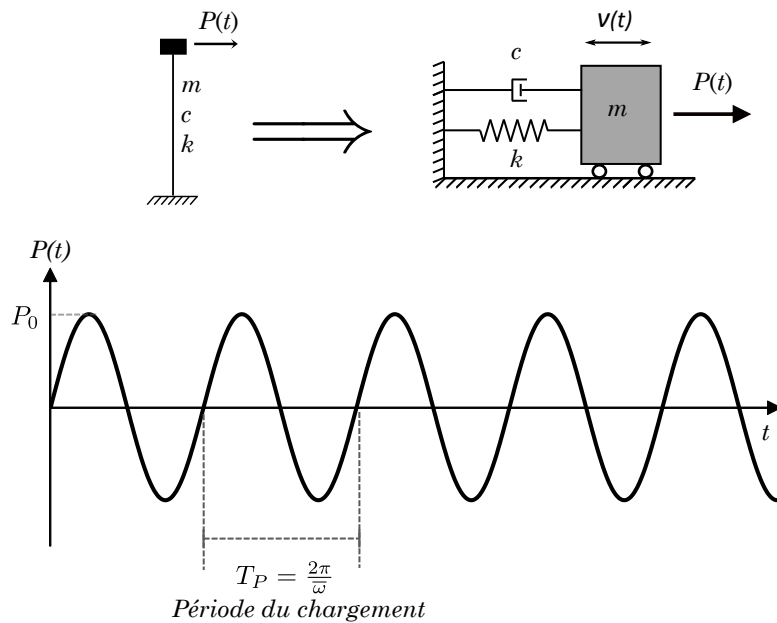


FIGURE 2.22 – Système à 1ddl soumis à un chargement harmonique

Remarque : la force $P(t)$ peut être écrite avec la fonction cosinus, $P(t) = P_0 \cos \bar{\omega} t$, les mêmes étapes seront suivies pour déterminer la réponse d'un système à 1 ddl à un tel chargement.

La force harmonique est utilisée pour reproduire les effets d'un chargement cyclique sur les systèmes structurels, on la retrouve par exemple dans le dimensionnement des blocs de fondations de machines tournantes.

L'équation de mouvement d'un système à 1ddl, de masse m , de constante d'amortissement c , et de rigidité k subissant une force harmonique $P(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t$ s'écrit comme suit :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t$$

La solution générale $v(t)$ de cette équation est composée de deux parties : une solution dite *homogène* $v_h(t)$, elle représente la solution de l'équation sans second membre, et

une solution dite *particulière* $v_p(t)$, qui dépend de la forme du chargement.

$$\underbrace{v(t)}_{\text{réponse générale}} = \underbrace{v_h(t)}_{\text{réponse homogène}} + \underbrace{v_p(t)}_{\text{réponse particulière}}$$

2.3.1 Systèmes non-amortis

En absence d'amortissement, l'équation de mouvement s'écrit :

$$m\ddot{v}(t) + kv(t) = P_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.23)$$

On peut aussi l'écrire en divisant par la masse :

$$\ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = \frac{P_0}{m} \sin \bar{\omega}t \quad (2.24)$$

Nous allons dans ce qui suit exprimer l'expression de la solution générale de l'équation 2.23

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

Réponse homogène $v_h(t)$:

C'est la solution de l'équation sans chargement :

$$m\ddot{v}(t) + kv(t) = 0$$

qui représente l'équation de mouvement d'un système à 1ddl en vibrations libres, la solution s'écrit alors sous la forme :

$$v_h(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

A et B sont des constantes réelles à déterminer à partir des conditions initiales : $v(0)$ et $\dot{v}(0)$.

Attention : On ne peut pas déterminer A et B à ce stade car les conditions initiales sont exprimées en terme de déplacement général (réponse générale), il faut donc avoir toute l'expression $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$ avant de pouvoir appliquer les conditions initiales.

Réponse particulière $v_p(t)$:

La forme de $v_p(t)$ dépend de la forme du chargement. La réponse à une force harmonique est harmonique et l'absence d'amortissement fait que cette réponse soit en phase avec le chargement, elle s'écrit donc sans déphasage comme suit :

$$v_p(t) = \rho \sin \bar{\omega}t \quad (2.25)$$

ρ est l'amplitude de la réponse particulière, on peut la déterminer en remplaçant l'expression de $v_p(t)$ (équation 2.25) dans l'équation 2.23, ce qui donne :

$$\begin{aligned} m\ddot{v}_p(t) + kv_p(t) &= P_0 \sin \bar{\omega}t \\ \Rightarrow m[-\rho\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t] + k[\rho \sin \bar{\omega}t] &= P_0 \sin \bar{\omega}t \\ \Rightarrow \rho[k - m\bar{\omega}^2] \sin \bar{\omega}t &= P_0 \sin \bar{\omega}t \\ \Rightarrow \rho k \left[1 - \frac{m\bar{\omega}^2}{k}\right] &= P_0 \quad \text{Pour une solution valable à tout instant } t \\ \Rightarrow \rho &= \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}} \quad \text{avec} \quad \frac{k}{m} = \omega^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

La réponse particulière est donc exprimée par :

$$\boxed{v_p(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega}t} \quad (2.26)$$

Le terme $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ est appelé **rapport des fréquences**, c'est le rapport entre la pulsation du chargement et la pulsation propre du système. On verra par la suite que la valeur du facteur β fournit une indication sur le comportement d'un système à 1ddl sous chargement harmonique.

Réponse générale $v(t)$:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_h(t) + v_p(t) \\ v(t) &= A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega}t \end{aligned} \quad (2.27)$$

Exprimons maintenant A et B pour des conditions initiales au repos : $v(0) = 0$ et $\dot{v}(0) = 0$. Ces conditions représentent le cas le plus général en pratique, car on considère qu'avant l'application du chargement les structures sont au repos.

Remarque : Les mêmes étapes sont à suivre si les conditions ne sont pas au repos, c-à-d $v(0) \neq 0$ et/ou $\dot{v}(0) \neq 0$, c'est le cas par exemple des systèmes qui sont déjà en mouvement au moment d'appliquer le chargement $P(t)$.

On remplaçant $t = 0$ dans l'équation 2.27, on trouve :

$$\boxed{B = v(0) = 0}$$

En dérivant l'équation 2.27 et en remplaçant $t = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t + \bar{\omega} \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \cos \bar{\omega} t \\ \dot{v}(0) &= A\omega + \bar{\omega} \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad &\boxed{A = -\frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

L'expression de la réponse générale d'un système à 1ddl soumis à un chargement harmonique $P(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t$, pour des conditions initiales au repos, s'écrit :

$$v(t) = \underbrace{-\frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2} \sin \omega t}_{v_h(t)} + \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t}_{v_p(t)} \quad (2.28)$$

d'où

$$\boxed{v(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} [\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t]} \quad (2.29)$$

On remarque que l'équation 2.29 est indéterminée lorsque $\beta = 1$, c'est le cas de résonance, ce phénomène a lieu lorsque la pulsation du chargement égale la pulsation propre du système ($\bar{\omega} = \omega$), ce cas sera traité par la suite comme cas particulier.

L'exemple de la figure 2.23 montre la contribution des deux réponses homogène et particulière à la réponse générale, pour $\beta = 1.6$.

Comme les systèmes vibratoires réels sont dotés d'un amortissement, nous allons montrer dans le titre suivant (Systèmes amortis) que la la partie homogène de la réponse disparaît après un court intervalle de temps, ce qui ramène la solution générale à la solution particulière qui devient une solution permanente. Si on examine la solution particulière :

$$v_p(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t$$

elle fait intervenir les termes suivants :

$v_{st} = \frac{P_0}{k}$ c'est le **déplacement statique**, il représente le déplacement que produirait la force P_0 appliquée de manière statique.

$D = \frac{1}{|1-\beta^2|}$ est le **facteur d'amplification dynamique**, il représente l'effet de l'amplification dynamique du chargement harmonique par rapport à la statique.

Lorsqu'on exprime le déplacement dynamique maximal en régime particulier v_{pmax} , il s'écrit :

$$v_{pmax} = \underbrace{\frac{P_0}{k}}_{v_{st}} \underbrace{\frac{1}{1-\beta^2}}_D$$

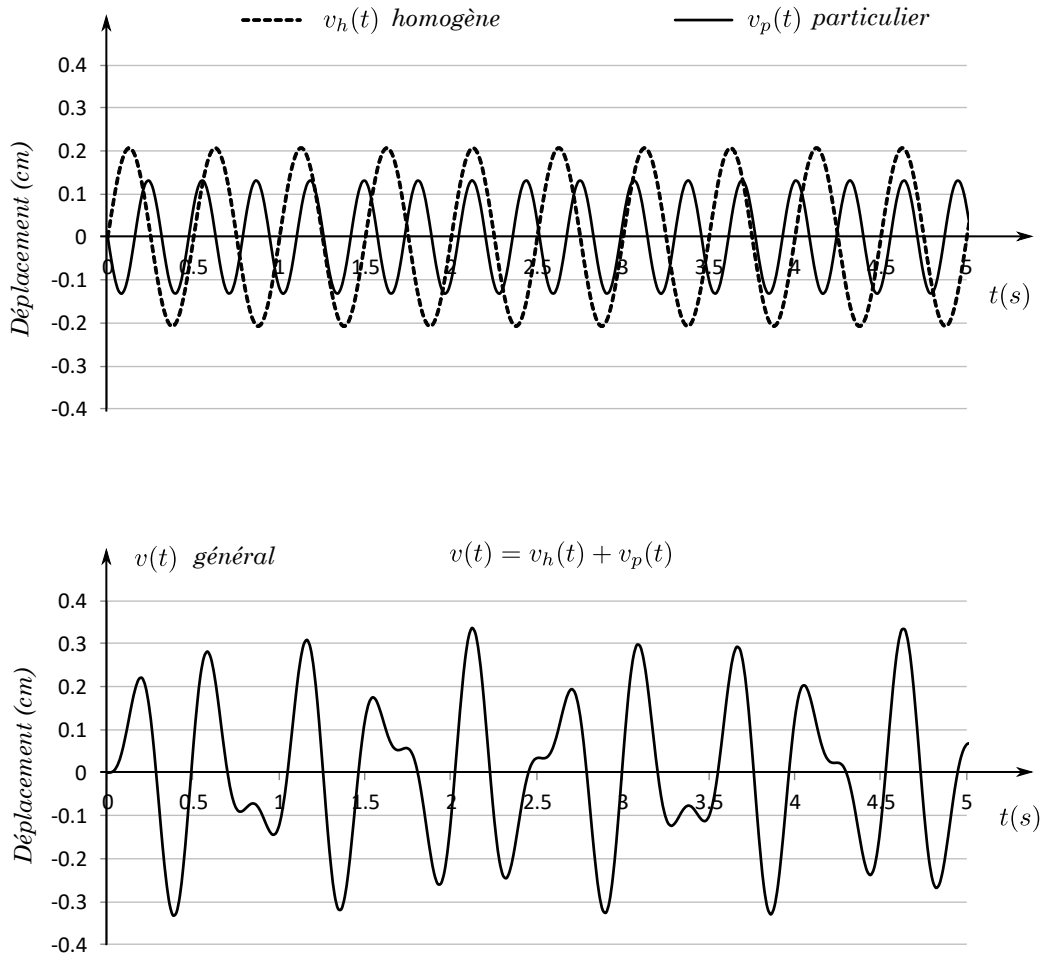


FIGURE 2.23 – Réponse d'un système à 1ddl non-amorti à un chargement harmonique

d'où

$$D = \frac{v_{max}}{v_{st}} = \frac{\text{déplacement max en dynamique}}{\text{déplacement en statique}}$$

Facteur de réponse $R(t)$: On peut définir le rapport entre la réponse dynamique générale et la réponse statique à tout instant à travers le facteur de réponse $R(t)$:

$$R(t) = \frac{v(t)_{dynamique}}{v_{statique}} = \frac{v(t)}{v_{st}} = \frac{v_h(t) + v_p(t)}{v_{st}}$$

Pour des conditions initiales au repos, l'expression de $R(t)$ est déterminée en exprimant $v(t)$ par l'équation 2.29 et en exprimant v_{st} par $\frac{P_0}{k}$, on obtient :

$$R(t) = \frac{1}{1 - \beta^2} [\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t] \quad (2.30)$$

2.3.2 Systèmes amortis

Pour les systèmes amortis soumis à un chargement harmonique, l'équation de mouvement s'écrit comme suit :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.31)$$

qui peut s'écrire, en divisant par la masse :

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega\dot{v}(t) + \omega^2v(t) = \frac{P_0}{m} \sin \bar{\omega}t \quad (2.32)$$

La solution générale :

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

Réponse homogène $v_h(t)$: qu'on appelle aussi **réponse transitoire**, est la solution de l'équation 2.32 sans chargement :

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega\dot{v}(t) + \omega^2v(t) = 0$$

C'est la même équation représentative d'un système à 1ddl amorti en vibrations libres. En considérant que le système est sous-amorti ($\xi < 1$), c'est le cas des structures vibratoires étudiées en génie civil, la forme de la solution est donnée par :

$$v_h(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t]$$

$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ est la pulsation amortie du système. A et B sont des constantes à définir à partir des conditions initiales.

Réponse particulière $v_p(t)$: appelée aussi **réponse permanente**. La réponse à une force harmonique est harmonique avec un déphasage dû à la présence de l'amortissement, d'où

$$v_p(t) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (2.33)$$

En plus de l'amplitude de la réponse particulière ρ , il faut aussi définir le déphasage θ .

Pour simplifier la forme de $v_p(t)$ de l'équation 2.33, on peut l'écrire sous la forme :

$$v_p(t) = A_1 \sin \bar{\omega}t + B_1 \cos \bar{\omega}t \quad (2.34)$$

et dans ce cas, ce sont les constantes A_1 et B_1 qui sont à définir. En remplaçant l'expression de $v_p(t)$ (équation 2.34) dans l'équation 2.32, on a :

$$\ddot{v}_p(t) + 2\xi\omega\dot{v}_p(t) + \omega^2v_p(t) = \frac{P_0}{m} \sin \bar{\omega}t \quad (2.35)$$

avec :

$$\begin{cases} v_p(t) = A_1 \sin \bar{\omega}t + B_1 \cos \bar{\omega}t \\ \dot{v}_p(t) = A_1 \bar{\omega} \cos \bar{\omega}t - B_1 \bar{\omega} \sin \bar{\omega}t \\ \ddot{v}_p(t) = -A_1 \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t - B_1 \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega}t \end{cases} \quad (2.36)$$

En remplaçant les équations 2.36 dans l'équation 2.35 et en séparant les termes en sinus et en cosinus, on trouve :

$$[-A_1 \bar{\omega}^2 - B_1 \bar{\omega} 2\xi \omega + A_1 \omega^2] \sin \bar{\omega}t + [-B_1 \bar{\omega}^2 + A_1 \bar{\omega} 2\xi \omega + B_1 \omega^2] \cos \bar{\omega}t = \frac{P_0}{m} \sin \bar{\omega}t$$

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} -A_1 \bar{\omega}^2 - B_1 \bar{\omega} 2\xi \omega + A_1 \omega^2 = \frac{P_0}{m} \\ -B_1 \bar{\omega}^2 + A_1 \bar{\omega} 2\xi \omega + B_1 \omega^2 = 0 \end{cases}$$

En divisant les deux équations par ω^2 , on a :

$$\begin{cases} -A_1 \beta^2 - B_1 2\xi \omega \beta + A_1 = \frac{P_0}{m\omega^2} \\ -B_1 \beta^2 + A_1 2\xi \omega \beta + B_1 = 0 \end{cases} \quad \text{avec } k = m\omega^2 \quad \text{et } \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

ce qui permet de trouver :

$$A_1 = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi \beta)^2}$$

et

$$B_1 = -\frac{P_0}{k} \frac{2\xi \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi \beta)^2}$$

Puisque

$$v_p = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta) = A_1 \sin \bar{\omega}t + B_1 \cos \bar{\omega}t$$

on peut alors déduire ρ et θ à partir de A_1 et B_1 , en se servant de l'identité trigonométrique :

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

on a :

$$\rho[\sin \bar{\omega}t \cos \theta - \cos \bar{\omega}t \sin \theta] = A_1 \sin \bar{\omega}t + B_1 \cos \bar{\omega}t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \rho \cos \theta \\ B_1 = -\rho \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \\ \tan \theta = -\frac{B_1}{A_1} \end{cases} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} -\frac{B_1}{A_1}$$

ce qui donne :

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \end{cases}$$

ρ représente le déplacement maximal du système en régime permanent et le déphasage θ représente le retard de la réponse du système par rapport au chargement harmonique appliqué, il est compris entre 0 et 180°.

La réponse particulière peut donc s'écrire :

$$v_p(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left[(1-\beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t \right] \quad (2.37)$$

ou bien :

$$v_p(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad \text{avec} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \quad (2.38)$$

Réponse générale $v(t)$: $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$

$$v(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t]}_{\text{réponse transitoire}} + \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta)}_{\text{réponse permanente}} \quad (2.39)$$

En regardant la forme de la réponse générale tel que montré sur l'exemple de la figure 2.24 pour des conditions initiales au repos, on constate que la réponse transitoire (homogène) disparaît après un temps assez court et la réponse générale devient parfaitement égale à la réponse particulière qui représente le régime permanent.

Remarque : Lorsque le chargement appliqué est de longue durée, les problèmes dynamiques sont le plus souvent étudiés en régime permanent, car la contribution du régime transitoire disparaît rapidement.

Facteur d'amplification dynamique

En examinant la réponse en régime permanent :

$$v_p(t) = \underbrace{\frac{P_0}{k}}_{v_{st}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}}_D \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

on peut voir que le déplacement maximal est le produit du déplacement statique et du facteur d'amplification dynamique qui s'écrit pour les systèmes amortis :

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (2.40)$$

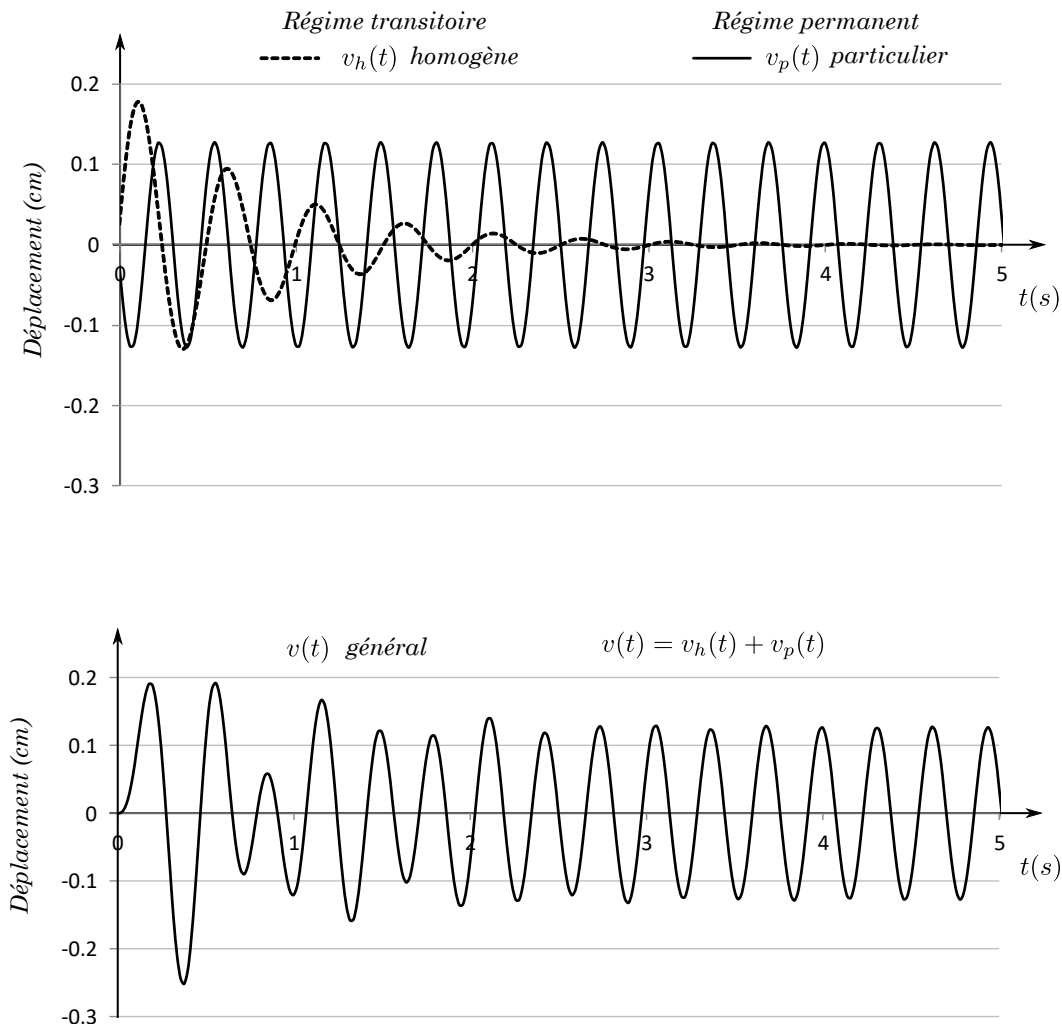


FIGURE 2.24 – Réponse d'un système à 1ddl amorti à un chargement harmonique

Rappelons qu'il représente l'effet de l'amplification dynamique par rapport à la statique.

$$D = \frac{v_{max}}{v_{st}} = \frac{\text{déplacement max en dynamique}}{\text{déplacement en statique}}$$

Remarque : le déplacement dynamique étant celui du régime permanent car après un temps court $v(t) = v_p(t)$

Le facteur D ne dépend que de deux paramètres, β et ξ . Sur la figure 2.25, on a schématisé la variation du facteur d'amplification dynamique D en fonction de β pour différentes valeurs du taux d'amortissement critique ξ .

Il est clair que l'augmentation de ξ , réduit la valeur de D . Plus un système est amorti, plus petit est son déplacement maximal.

On peut constater que quelque soit la valeur de ξ , on distingue trois intervalles de β :

$$1) \beta \ll \Rightarrow D \simeq 1 \Rightarrow v_{max} = v_{st}$$

Pour les petites valeurs de β , le facteur d'amplification dynamique est pratiquement

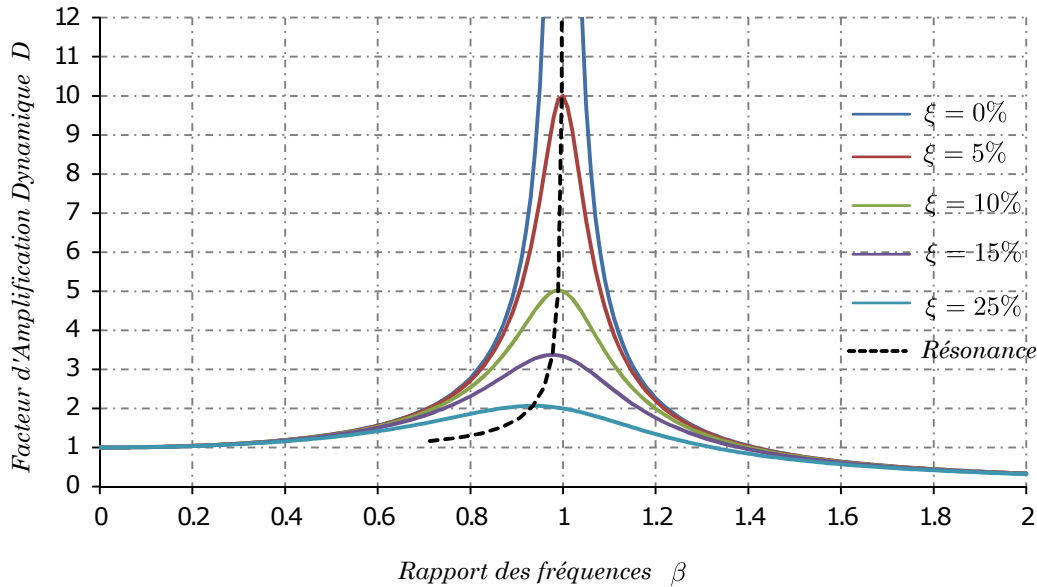


FIGURE 2.25 – Facteur d'Amplification Dynamique

égal à 1, d'ailleurs lorsqu'on remplace $\beta = 0$ dans l'expression de D de l'équation 2.40 on trouve $D = 1$, quelque soit la valeur de ξ . Dans ce cas le déplacement maximal atteint en dynamique est égal au déplacement statique. Ceci s'explique par le fait qu'une petite valeur de β signifie que la pulsation du chargement $\bar{\omega}$ est très petite devant la pulsation propre du système ω , dans ce cas le chargement est appliqué tellement lentement qu'il revient à l'application d'un chargement statique.

$$2) \beta \gg 1 \implies D \ll 1 \implies v_{max} \ll v_{st}$$

Pour les grandes valeurs de β , le facteur D est très petit et tend vers 0, quelque soit la valeur de ξ . Dans ce cas, le déplacement dynamique maximal est très petit devant le déplacement statique et tend même vers 0. Ceci s'explique par le fait que dans ce cas la pulsation du chargement $\bar{\omega}$ est tellement élevée devant la pulsation propre du système ω que le système ne peut même pas atteindre le déplacement statique tellement il est rapide, le déplacement agit dans le sens opposé à celui du chargement. Pour des valeurs de β allant à l'infini, le déplacement du système tend vers 0, $\beta \rightarrow \infty \implies D \rightarrow 0$ et $v_{max} \rightarrow 0$.

$$3) \text{ Pour des valeurs de } \beta \text{ proche de } 1 \implies D > 1 \implies v_{max} > v_{st}$$

Dans ce cas, la réponse dynamique maximale est fortement amplifiée par rapport à la réponse statique, notamment dans le cas de résonance lorsque $\beta = 1$ où l'amplification atteint sa valeur ultime $D = \frac{1}{2\xi}$.

A la résonance, dans le cas des systèmes non-amortis ($\xi = 0$), le facteur d'amplification tend vers l'infini, ce qui implique que le déplacement maximal en dynamique tend lui

aussi vers l'infini.

$$\text{Résonance } \beta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0 \Rightarrow D \rightarrow \infty \Rightarrow v_{max} \rightarrow \infty \\ \xi \neq 0 \Rightarrow D = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow v_{max} = \frac{1}{2\xi} v_{st} = \frac{1}{2\xi} \frac{P_0}{k} \end{cases}$$

Remarque : Dans les structures de génie civil, on admet que la résonance a lieu lorsque $\beta = 1$ ($\bar{\omega} = \omega$) à cause des faibles valeurs de ξ , mais dans un système mécanique quelconque, si ξ prend des valeurs élevées, l'expression exacte de β en cas de résonance provient de l'annulation de la dérivée de D en fonction de β . L'expression exacte de β à la résonance s'obtient alors comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dD(\beta)}{d\beta} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

On trouve l'expression exacte de β à la résonance :

$$\beta_{résonance} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

d'où l'expression exacte de D à la résonance :

$$D_{résonance} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

On remarque bien que pour de faibles valeurs de ξ , ($\xi < 0.2$), on a :

$$\boxed{\beta_{résonance} \simeq 1 \quad \text{et} \quad D_{résonance} \simeq \frac{1}{2\xi}}$$

Intéressons nous maintenant au comportement du système à 1ddl sous charge harmonique en cas de résonance, en examinant sa réponse à travers l'évolution du déplacement général dans le temps.

2.3.3 Réponse d'un système à 1ddl en cas de résonance

Systèmes non-amortis

Reprenons l'expression de la réponse générale d'un système à 1ddl non-amorti pour des condition initiales au repos (équation 2.29) :

$$v(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} [\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t]$$

Sachant que $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$, on peut réécrire l'équation avec $\bar{\omega} = \beta\omega$

$$v(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} [\sin \beta\omega t - \beta \sin \omega t] \quad (2.41)$$

Le terme du déplacement statique $\frac{P_0}{k}$ n'influence pas la forme de la réponse, on peut alors exprimer la réponse en terme de facteur de réponse $R(t)$ (voir l'équation 2.30) :

$$R(t) = \frac{1}{1 - \beta^2} [\sin \beta\omega t - \beta \sin \omega t] \quad (2.42)$$

Il suffit maintenant de remplacer $\beta = 1$ dans l'équation 2.42, et on obtient :

$$R(t) = \frac{0}{0}$$

On remarque que l'expression de $R(t)$ est indéterminée, on peut dans ce cas utiliser la règle de l'Hôpital pour la déterminer.

Rappel de la règle de l'Hôpital : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$R(t) = \frac{\sin \beta\omega t - \beta \sin \omega t}{1 - \beta^2} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$$

$$\implies \lim_{\beta \rightarrow 1} R(t) = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\omega t \cos \beta\omega t - \sin \omega t}{-2\beta}$$

$$\beta = 1 \implies R(t) = \frac{\omega t \cos \omega t - \sin \omega t}{-2}$$

d'où, le facteur de réponse en cas de résonance :

$$R(t)_{résonance} = \frac{1}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \quad (2.43)$$

et le déplacement en régime général, en cas de résonance :

$$v(t)_{résonance} = \frac{P_0}{2k} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \quad (2.44)$$

L'expression de $R(t)$ à la résonance est représentée sur la figure 2.26 (a), où il est clair que le déplacement prend des valeurs continuellement croissantes ce qui fait que le déplacement maximal ne peut être atteint car il tend vers l'infini. Un tel système vibre en atteignant des déformations de plus en plus élevées, il se plastifie jusqu'à la rupture totale.

Systèmes amortis

L'expression du déplacement en régime général pour un système à 1ddl amorti, s'écrit, tel que donné dans l'équation 2.39 :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t] + \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

On peut aussi l'écrire sous la forme :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t] + \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t] \quad (2.45)$$

En remplaçant $\beta = 1$ et en prenant $\bar{\omega} = \omega$ dans l'équation 2.45, on a :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t] - \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} \cos \omega t \quad (2.46)$$

Déterminons maintenant les constantes A et B pour des conditions initiales au repos.

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\implies B = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} \\ \dot{v}(0) = 0 &\implies A = \frac{P_0}{k} \frac{\omega}{2\omega_D} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned}$$

En remplaçant A et B dans l'équation 2.46, on obtient l'expression du déplacement général en cas de résonance :

$$v(t)_{résonance} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t + \cos \omega_D t \right) - \cos \omega t \right] \quad (2.47)$$

et l'expression du facteur de réponse en cas de résonance :

$$R(t)_{résonance} = \frac{1}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t + \cos \omega_D t \right) - \cos \omega t \right] \quad (2.48)$$

L'expression du facteur de réponse $R(t)$ est schématisée sur la figure 2.26 (b). On remarque que même si l'amplification du mouvement est grande en cas de résonance, elle est tout de même limitée par l'amortissement empêchant ainsi le système d'avoir des déplacements qui tendent vers l'infini.

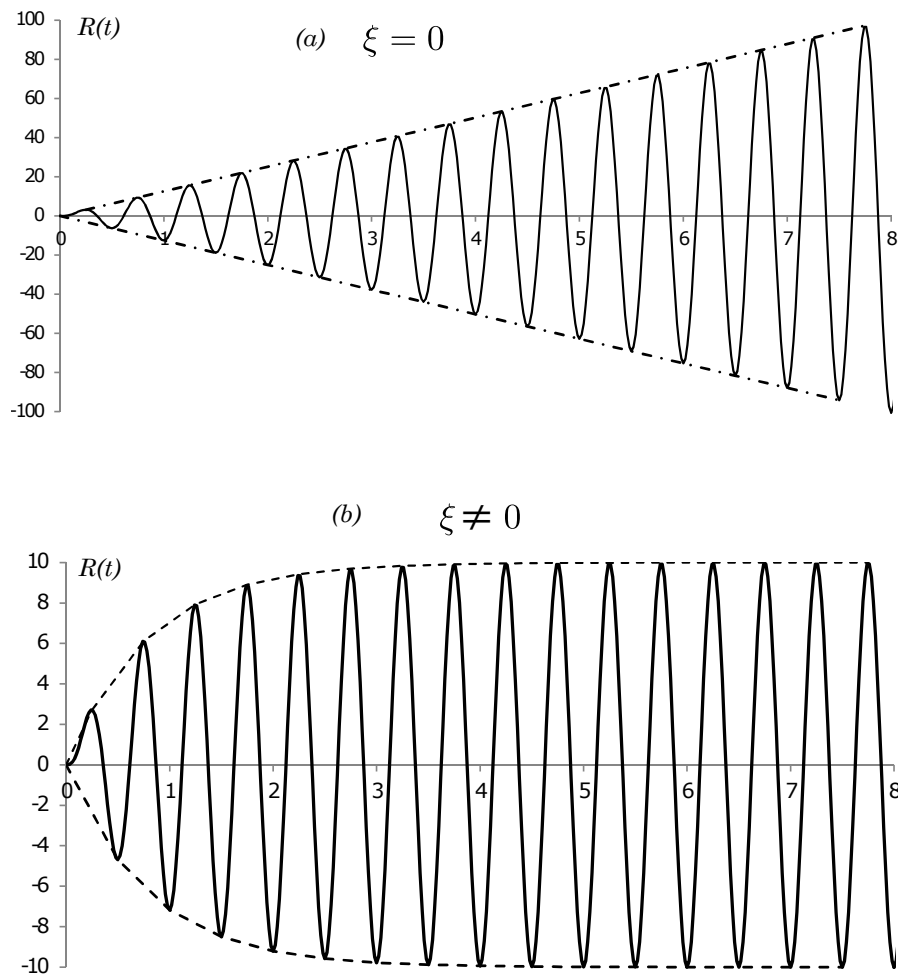


FIGURE 2.26 – La réponse à la résonance

2.3.4 Isolation vibratoire

Le problème d'isolation vibratoire peut être traité en utilisant la réponse d'un système à 1ddl à un chargement harmonique. On distingue deux classes d'isolation vibratoire, lorsqu'une machine produisant des forces harmoniques est installée sur une base, dans ce cas ce qui est recherché c'est d'isoler la base des vibrations de la machine, il s'agit du problème de 1^{ère} classe. Pour la 2^{ème} classe, le problème est inversé, car c'est la base qui est en mouvement et c'est la masse qui doit être isolée. Nous allons dans ce qui suit présenter et analyser le problème d'isolation vibratoire à travers les deux classes.

Problème d'isolation vibratoire de 1^{ère} Classe

Lorsqu'une machine tournante produisant des forces harmoniques est installée sur une base (fondation, plancher,..), on cherche à réduire au maximum la force transmise par la machine à la base et pour ce faire on utilise un support qui jouera le rôle de suspension pour isoler la machine de la base. Le support peut être représenté par un

système de ressorts-amortisseurs. Dans le problème représenté sur la figure 2.27, la force induite par la machine agit dans la direction verticale, et en considérant que l'unique possibilité de mouvement est le déplacement vertical de la machine de masse M , le problème revient à étudier un système à 1ddl soumis à une force harmonique. L'équation de mouvement de ce système s'écrit dans ce cas :

$$M\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P_0 \sin \bar{\omega}t$$

M représente la masse totale de la machine. k , et c représentent la rigidité et l'amortissement du support, respectivement. $v(t)$ est le déplacement vertical de la machine de masse M .

En ne considérant que **le régime permanent**, le déplacement de la masse M s'exprime par :

$$v(t) = \frac{P_0}{k} D \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (2.49)$$

avec

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \text{et} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

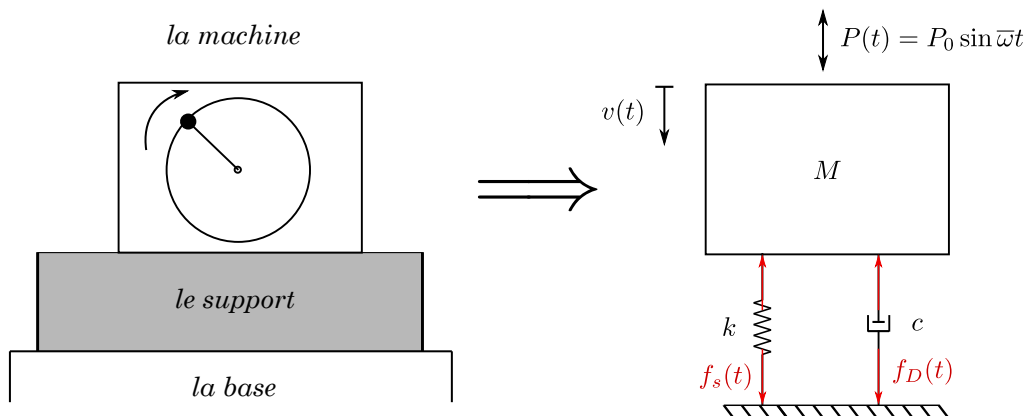


FIGURE 2.27 – Problème d'isolation vibratoire : 1ère Classe

Pour estimer l'efficacité de l'isolation vibratoire, on doit d'abord quantifier la force de la machine transmise à la base et la comparer à la force produite par la machine qui est égale à $P_0 \sin \bar{\omega}t$.

La force transmise à la base $F_{tr}(t)$:

La force transmise à la base est composée d'une force élastique $f_s(t)$ transmise à travers le ressort, et d'une force d'amortissement $f_D(t)$ transmise à travers l'amortisseur (voir la figure 2.27) :

$$F_{tr}(t) = f_s(t) + f_D(t)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_s(t) &= kv(t) \\ &= k \frac{P_0}{k} D \sin(\bar{\omega}t - \theta) \\ &= P_0 D \sin(\bar{\omega}t - \theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_D(t) &= c\dot{v}(t) \\ &= c \frac{P_0}{k} D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \theta) \quad \text{avec} \quad c = \xi 2M\omega \\ &= 2\xi M\omega \frac{P_0}{k} D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \theta) \quad \text{avec} \quad \frac{k}{M} = \omega^2 \\ &= 2\xi \beta P_0 D \cos(\bar{\omega}t - \theta) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} F_{tr}(t) &= P_0 D \sin(\bar{\omega}t - \theta) + 2\xi \beta P_0 D \cos(\bar{\omega}t - \theta) \\ &= P_0 D [\sin(\bar{\omega}t - \theta) + 2\xi \beta \cos(\bar{\omega}t - \theta)] \end{aligned}$$

On peut maintenant déterminer la force maximale transmise à la base :

$$F_{tr}^{max} = P_0 D \sqrt{1 + (2\xi \beta)^2}$$

Définissons maintenant la **Transmissibilité** ou la **Transmittance** TR comme le rapport entre la force maximale transmise à la base et la force maximale appliquée par la machine :

$$TR = \frac{\text{Force maximale transmise à la base}}{\text{Force maximale appliquée par la machine}}$$

elle s'exprime par :

$$\begin{aligned} TR &= \frac{F_{tr}^{max}}{F_{app}^{max}} \\ &= \frac{P_0 D \sqrt{1 + (2\xi \beta)^2}}{P_0} \end{aligned}$$

d'où

$$TR = D \sqrt{1 + (2\xi \beta)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi \beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi \beta)^2}} \quad (2.50)$$

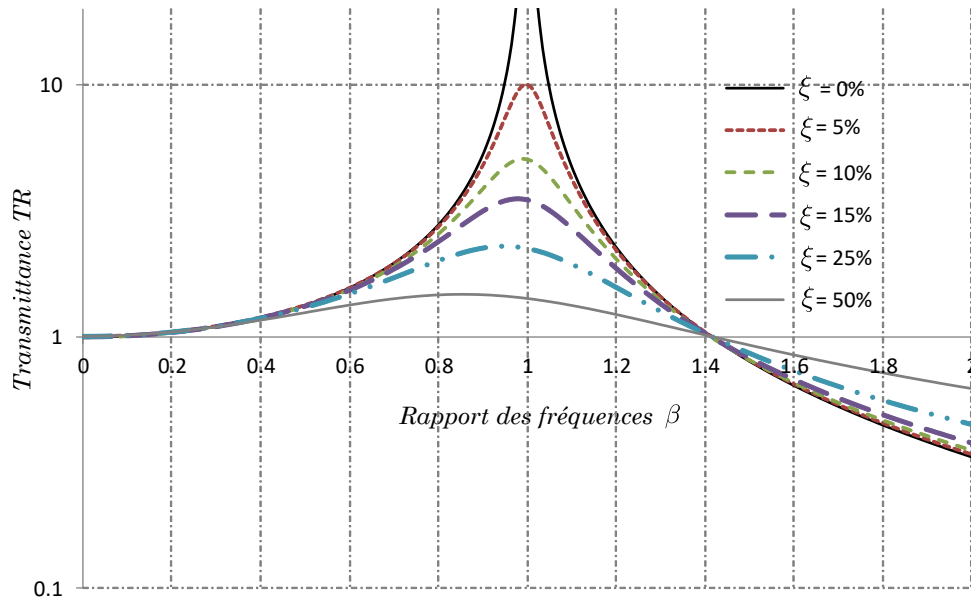


FIGURE 2.28 – Transmittance

Tout comme le facteur d'amplification dynamique D , la Transmittance TR ne dépend que de deux paramètres : ξ et β . On a tracé sur la figure 2.28 la variation de TR en fonction de β pour différentes valeurs de ξ . Pour qu'un système présente une bonne isolation vibratoire, il faut que TR soit aussi petite que possible.

On remarque sur la figure 2.28 que quelque soit la valeur de ξ , toutes les courbes passent par le point correspondant à $\beta = \sqrt{2}$. Ce point correspond à $TR = 1$, il marque la limite entre deux intervalles :

+ $\beta < \sqrt{2} \implies TR > 1$, dans cet intervalle les systèmes présentent une mauvaise isolation vibratoire, mais le rôle de l'amortissement est favorable, car il réduit la valeur de TR .

+ $\beta > \sqrt{2} \implies TR < 1$, dans cet intervalle les systèmes présentent une bonne isolation vibratoire, néanmoins le rôle de l'amortissement est défavorable, car il fait augmenter la valeur de TR .

Idéalement, pour assurer l'efficacité vibratoire d'un système il faut avoir $\beta > \sqrt{2}$ et ξ aussi petit que possible.

Dans le cas des systèmes non-amortis, l'expression de la Transmittance est celle de l'équation 2.50 en remplaçant ξ par 0 :

$$\xi = 0 \implies TR = \frac{1}{|1 - \beta^2|} \quad (2.51)$$

Comme la valeur de TR est positive, alors :

$$\begin{cases} TR = \frac{1}{1 - \beta^2} & \text{si } \beta < 1 \\ TR = \frac{1}{\beta^2 - 1} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Problème d'isolation vibratoire de 2^{ème} Classe

Une masse M est installée sur une base à travers un système ressort-amortisseur (figure 2.29). La base subit un mouvement harmonique de la forme

$$v_b(t) = v_0 \sin \bar{\omega} t$$

Dans ce problème, c'est la masse qui doit être isolée du mouvement de la base. Pour estimer la Transmittance nous allons déterminer le déplacement total (absolu) transmis à la masse pour le comparer au déplacement de la base, en considérant le régime permanent.

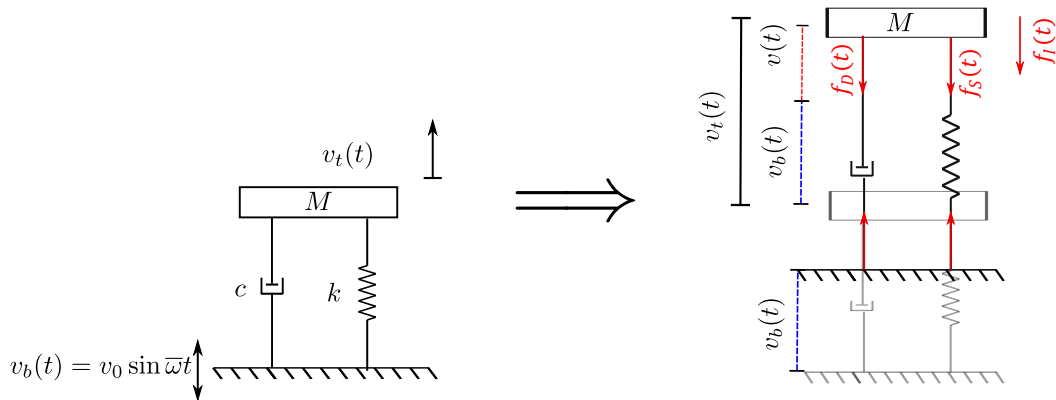


FIGURE 2.29 – Problème d'isolation vibratoire : 2^{ème} Classe

Le problème tel qu'il est présenté, est celui d'un système à 1ddl subissant un mouvement $v_b(t)$ à sa base, l'équation de mouvement peut s'écrire dans ce cas en fonction du déplacement total comme suit :

$$m\ddot{v}_t(t) + c\dot{v}_t(t) + kv_t(t) = c\dot{v}_b(t) + kv_b(t) \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow m\ddot{v}_t(t) + c\dot{v}_t(t) + kv_t(t) = \underbrace{cv_0\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t}_{P_1} + \underbrace{kv_0 \sin \bar{\omega} t}_{P_2} \quad (2.53)$$

Résoudre l'équation 2.53 donne le déplacement total de la masse $v_t(t)$.

On peut aussi écrire l'équation de mouvement de la masse en fonction du déplacement relatif, comme suit :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = -m\ddot{v}_b(t) \quad (2.54)$$

avec :

$$\ddot{v}_b(t) = -v_0\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t$$

d'où l'équation :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = \underbrace{mv_0\bar{\omega}^2}_{P_0} \sin \bar{\omega}t \quad (2.55)$$

Résoudre l'équation 2.55 donne le déplacement relatif de la masse :

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{P_0}{k} D \sin(\bar{\omega}t - \theta) \\ &= \frac{mv_0\bar{\omega}^2}{k} D \sin(\bar{\omega}t - \theta) \\ &= v_0\beta^2 D \sin(\bar{\omega}t - \theta) \end{aligned}$$

Le déplacement total est :

$$v_t(t) = v(t) + v_b(t) \quad (2.56)$$

$$\Rightarrow v_t(t) = v_0\beta^2 D \sin(\bar{\omega}t - \theta) + v_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.57)$$

Le déplacement total maximal transmis à la masse v_t^{max} :

On peut démontrer que v_t^{max} qui représente le maximum de l'équation 2.57 s'écrit :

$$v_t^{max} = v_0 \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} D \quad (2.58)$$

Le déplacement maximal appliqué par la base est égal à v_0

On peut maintenant définir la transmittance comme étant le rapport entre le déplacement total maximal transmis à la masse et le déplacement maximal appliqué par la base.

$$TR = \frac{\text{Déplacement total maximal transmis à la masse}}{\text{Déplacement maximal appliqué par la base}}$$

elle s'exprime par :

$$\begin{aligned} TR &= \frac{v_t^{max}}{v_{app}^{max}} \\ &= \frac{v_0 \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} D}{v_0} \end{aligned}$$

d'où

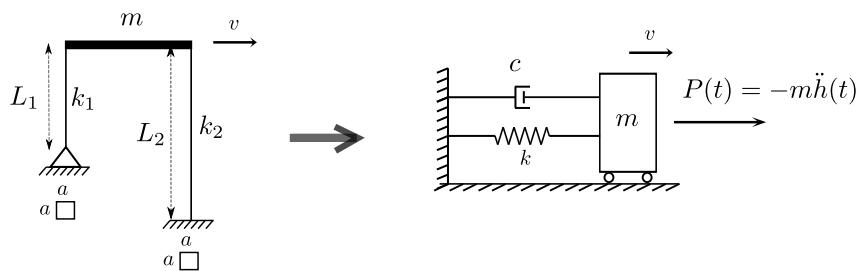
$$TR = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (2.59)$$

On remarque bien que l'expression de la transmittance est exactement celle de l'équation 2.50, représentative du problème d'isolation vibratoire de 1^{ère} Classe. Ceci implique que toutes les remarques faites sur la variation de TR en fonction de ξ et β sont aussi valables dans le problème de 2^{ème} Classe.

2.3.5 Application

Le portique à 1ddl de la figure ci-dessous est soumis à un mouvement harmonique horizontal $h(t)$ à sa base, $h(t) = 2.5 \sin(15t) \text{ cm}$.

Données : $m = 40 \text{ tonnes}$, $\xi = 7\%$, $L_1 = 2 \text{ m}$, $L_2 = 4 \text{ m}$, $a = 40 \text{ cm}$, $E = 3 \times 10^4 \text{ MPa}$



En considérant le régime permanent, calculer :

- l'effort tranchant maximal dans chaque poteau
- la contrainte normale maximale dans chaque poteau

Que dire de la transmissibilité du mouvement de la base à la masse. Commenter.

Solution

Pour calculer les efforts maximaux, on a besoin d'avoir le déplacement maximal induit par le mouvement à la base.

Calculons d'abord la rigidité de chaque ressort :

$$k_1 = \frac{3EI}{L_1^3} = \frac{3 \times 3 \times 10^{10} \times \frac{0.4^4}{12}}{2^3} = 24 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$k_2 = \frac{12EI}{L_2^3} = \frac{12 \times 3 \times 10^{10} \times \frac{0.4^4}{12}}{4^3} = 12 \times 10^6 \text{ N/m}$$

La rigidité équivalente du portique :

$$k = k_1 + k_2 = 36 \times 10^6 \text{ N/m} = 36 \times 10^3 \text{ KN/m}$$

La pulsation propre du portique :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36 \times 10^3}{40}} = 30 \text{ rd/s}$$

Le portique est soumis à un mouvement à la base de la forme :

$$h(t) = h_0 \sin \bar{\omega} t = 2.5 \sin(15t) \text{ cm}$$

L'équation de mouvement du portique s'écrit dans ce cas :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = -m\ddot{h}(t) = P(t)$$

$$\text{avec } \ddot{h}(t) = -h_0 \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t$$

$$\text{d'où } P(t) = mh_0 \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t$$

$$\Rightarrow P(t) = 40 \times 2.5 \times 10^{-2} (15)^2 \sin(15t) \text{ KN}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = \underbrace{225}_{P_0} \sin \underbrace{15}_{\bar{\omega}} t \text{ (KN)}}$$

L'équation de mouvement à résoudre est celle d'un système à 1ddl soumis à une force harmonique de la forme $P(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t$:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t$$

L'expression du déplacement en régime permanent :

$$v(t) = \frac{P_0}{k} D \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

Le déplacement maximal :

$$v_{max} = \frac{P_0}{k} D = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

avec :

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{15}{30} = 0.5 \quad \text{et} \quad \xi = 0.07$$

On trouve (*Attention à la compatibilité des unités*) :

$$v_{max} = \frac{P_0}{k} D = \frac{225}{36 \times 10^3} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.5^2)^2 + (2 \times 0.07 \times 0.5)^2}} = 8.29 \times 10^{-3} \text{ m}$$

L'effort tranchant maximal dans chaque poteau :

$$\begin{cases} T_{P1max} = k_1 v_{max} = 199.13 \text{ KN} \\ T_{P2max} = k_2 v_{max} = 99.56 \text{ KN} \end{cases}$$

La contrainte normale maximal dans chaque poteau :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I} \frac{a}{2} = \frac{M_{max}}{\frac{a^4}{12}} \frac{a}{2} = \frac{6M_{max}}{a^3}$$

On a pour les deux poteaux :

$$\begin{cases} M_{P1max} = T_{P1max} L_1 \\ M_{P2max} = T_{P2max} \frac{L_2}{2} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \sigma_{P1max} = \frac{6M_{P1max}}{a^3} = 37.33 \text{ MPa} \\ \sigma_{P2max} = \frac{6M_{P2max}}{a^3} = 18.69 \text{ MPa} \end{cases}$$

Ce qu'on peut dire sur la transmissibilité :

On peut voir le problème comme un problème d'isolation vibratoire de 2^{ème} Classe. On constate dans ce cas que la poutre est mal isolée du mouvement de la base, ceci peut être déduit rien qu'en regardant la valeur de β , car $\beta < \sqrt{2}$ implique forcément $TR > 1$ d'où une mauvaise isolation. On peut confirmer ce constat en calculant la valeur de TR .

$$TR = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 1.33$$

2.4 Vibrations forcées : chargement par impulsion

Une impulsion est un chargement de très courte durée comparant à la période propre d'un système à 1 ddl (figure 2.30). La réponse à une impulsion contient deux phases ; une phase de vibrations forcées qui dure le temps de l'application du chargement, suivie d'une phase de vibrations libres qui décrit le mouvement du système après cessation de sollicitation .

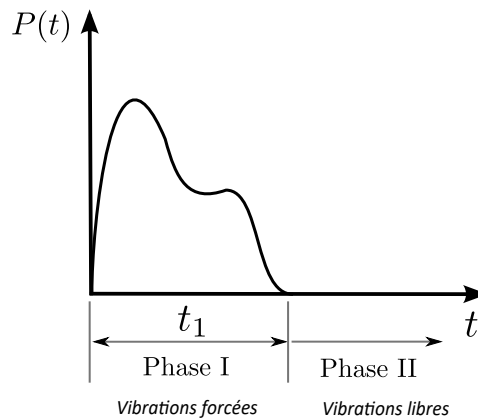


FIGURE 2.30 – Chargement par impulsion

Lorsque la réponse maximale est recherchée, l'amortissement présente peu d'intérêt, car la réponse maximale est atteinte dans une durée de temps tellement courte que les forces d'amortissement n'auront pas le temps d'agir ; le système n'a pas le temps de dissiper de l'énergie.

Nous allons, dans ce qui suit, exprimer la réponse maximale d'un système à 1ddl de masse m et de rigidité k , à plusieurs formes d'impulsions pour des conditions initiales au repos, l'amortissement sera donc négligé.

Selon la durée de l'impulsion, le déplacement maximal peut être atteint aussi bien en phase I (phase forcée) qu'en phase II (phase des vibrations libres).

2.4.1 Impulsion rectangulaire

Une impulsion rectangulaire et un chargement constant d'une courte durée t_1 , tel que montré sur la figure 2.4.1. Cherchons d'abord l'expression de la réponse dans les deux phases de vibration puis intéressons nous au déplacement maximal. La réponse générale étant la somme de la réponse homogène et de la réponse particulière.

Phase I : $t \in [0, t_1]$, vibrations forcées, $P(t) = P_0$

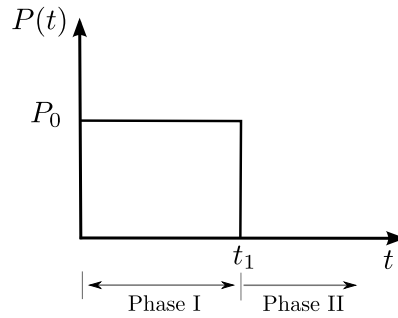


FIGURE 2.31 – Impulsion rectangulaire

L'équation de mouvement à résoudre dans ce cas est :

$$m\ddot{v}(t) + kv(t) = P(t) = P_0$$

L'expression du déplacement en phase I, est :

$$v_1(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{P_0}{k} \quad (2.60)$$

Pour des conditions initiales au repos, $v_1(0) = 0$ et $\dot{v}_1(0) = 0$, on a :

$$\boxed{v_1(t) = \frac{P_0}{k}(1 - \cos \omega t) \quad 0 \leq t \leq t_1} \quad (2.61)$$

Les conditions finales de la phase I, $v_1(t_1)$ et $\dot{v}_1(t_1)$, constituent les conditions initiales de la phase II.

$$\begin{cases} v_1(t_1) = \frac{P_0}{k}(1 - \cos \omega t_1) \\ \dot{v}_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\omega \sin \omega t_1 \end{cases} \quad (2.62)$$

Phase II : $t > t_1$, vibrations libres

L'équation de mouvement à résoudre dans ce cas est :

$$m\ddot{v}(t) + kv(t) = 0$$

Notons que la réponse commence à partir de l'instant $t = t_1$, et son expression est donnée par :

$$v_2(t) = A \sin \omega(t - t_1) + B \cos \omega(t - t_1) \quad (2.63)$$

A et B , dépendent des conditions initiales de la phase II, qui représentent les conditions finales de la phase I de l'équation 2.62.

$$\begin{cases} A = \frac{\dot{v}_2(t_1)}{\omega} = \frac{\dot{v}_1(t_1)}{\omega} \\ B = v_2(t_1) = v_1(t_1) \end{cases} \quad (2.64)$$

d'où l'expression de la réponse en phase II

$$v_2(t) = \frac{\dot{v}_1(t_1)}{\omega} \sin \omega(t - t_1) + v_1(t_1) \cos \omega(t - t_1) \quad t > t_1 \quad (2.65)$$

Déplacement maximal

Sachant que le déplacement maximal peut être atteint dans la phase I ou dans la phase II, cherchons le d'abord dans la phase I, c'est-à-dire pour $t \in [0, t_1]$. On cherche l'instant t_{pic} correspondant au déplacement maximal en annulant la vitesse :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) = 0 &\implies \frac{P_0}{k} \omega \sin \omega t = 0 \\ &\implies \sin \omega t = 0 \\ &\implies \omega t_{pic} = n\pi \quad \text{avec } n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

La première valeur du déplacement maximal correspond à la plus petite valeur de t_{pic} , c'est-à-dire celle correspondant à $n = 1$.

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$$

Pour que le déplacement maximal soit atteint en phase I, il faut que t_{pic} soit dans l'intervalle $[0, t_1]$, il doit donc vérifier :

$$\begin{aligned} t_{pic} \leq t_1 &\implies \frac{\pi}{\omega} \leq t_1 \\ &\implies \boxed{t_1 \geq \frac{T}{2}} \end{aligned}$$

et dans ce cas le déplacement maximal est égal à $v_1(t_{pic})$, on remplace $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$ dans l'équation 2.61 et on obtient :

$$\boxed{v_{max} = v_1(t_{pic}) = 2 \frac{P_0}{k}} \quad t_1 \geq \frac{T}{2}$$

Le facteur d'amplification dynamique D s'exprime dans ce cas par :

$$D = \frac{v_{max}}{v_{st}} = \frac{2 \frac{P_0}{k}}{\frac{P_0}{k}}$$

$$\boxed{D = 2}$$

Dans le cas où $t_1 < \frac{T}{2}$, la durée de l'impulsion est tellement courte que le maximum de la réponse ne peut être atteint en phase I, il sera donc atteint en phase II. A partir de l'expression de la réponse en phase II de l'équation 2.65, le déplacement maximal est :

$$v_{max} = v_{2max} = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}_1(t_1)}{\omega}\right)^2 + (v_1(t_1))^2}$$

en remplaçant les expressions de $v_1(t_1)$ et $\dot{v}_1(t_1)$ de l'équation 2.62 on a :

$$\begin{aligned} v_{max} &= \frac{P_0}{k} \sqrt{(\sin \omega t_1)^2 + (1 - \cos \omega t_1)^2} \\ &= \frac{P_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos \omega t_1)} \end{aligned}$$

En se servant des identités trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{aligned} v_{max} &= \frac{P_0}{k} \sqrt{2 \left(\cancel{\cos^2 \frac{\omega t_1}{2}} + \sin^2 \frac{\omega t_1}{2} - \cancel{\cos^2 \frac{\omega t_1}{2}} + \sin^2 \frac{\omega t_1}{2} \right)} \\ &= \frac{P_0}{k} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\omega t_1}{2}} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$v_{max} = 2 \frac{P_0}{k} \sin\left(\frac{\pi t_1}{T}\right) \quad t_1 < \frac{T}{2}$$

Le facteur d'amplification dynamique D est :

$$D = \frac{v_{max}}{v_{st}} = 2 \sin\left(\frac{\pi t_1}{T}\right)$$

2.4.2 Application

Considérons un système à 1ddl de masse $m = 100kg$ et de rigidité $k = 10KN/m$, soumis à une impulsion constante $P_0 = 100N$ pendant un temps t_1 . La période propre du système est de $T = 0.2\pi s$

Premier cas : la durée de l'impulsion est $t_1 = 0.25\pi s$, ce qui implique que $t_1 > \frac{T}{2}$ alors dans ce cas le déplacement maximal est atteint durant la phase I.

$$v_{max} = 2 \frac{P_0}{k} = 2cm \text{ atteint à l'instant } t_{pic} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2} = 0.1\pi s$$

La réponse globale dans les deux phases est illustrée sur la figure 2.32

Deuxième cas : la durée de l'impulsion est $t_1 = 0.1\pi s$, ce qui implique que $t_1 = \frac{T}{2}$ alors dans ce cas le maximum de la réponse est atteint à l'instant final de la phase I qui est aussi l'instant initial de la phase II.

Le déplacement maximal se calcule donc dans la phase I, ce qui donne les mêmes valeurs que celles du cas précédent $v_{max} = 2 \frac{P_0}{k} = 2cm$ atteint à l'instant $t_{pic} = \frac{T}{2} = 0.1\pi s$

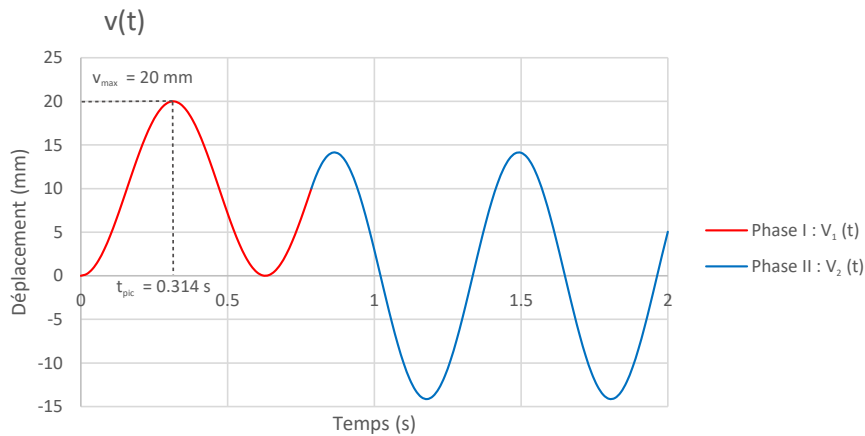


FIGURE 2.32 – Impulsion rectangulaire, le cas $t_1 > \frac{T}{2}$

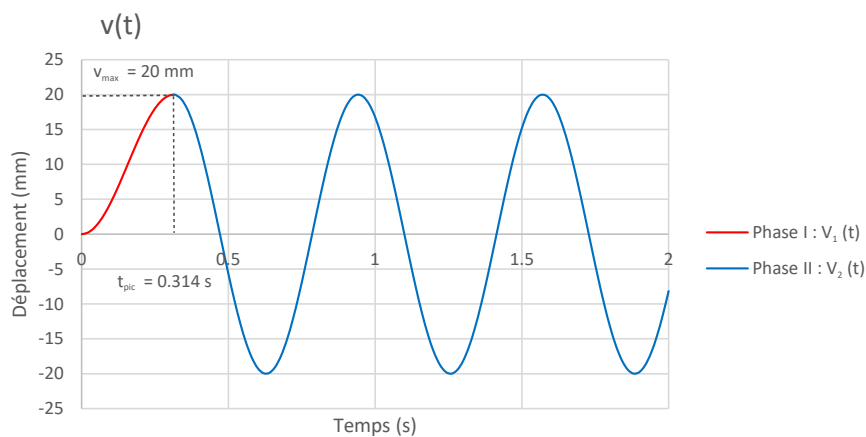


FIGURE 2.33 – Impulsion rectangulaire, le cas $t_1 = \frac{T}{2}$

L'évolution du déplacement est illustrée sur la figure 2.33

Troisième cas : la durée de l'impulsion est $t_1 = 0.025\pi s$, dans ce cas $t_1 < \frac{T}{2}$ alors dans ce cas le maximum de la réponse est atteint dans la phase II, celle des vibrations libres.

On calcule d'abord les conditions finales de la phase I :

$$v_1(t_1) = 2.93mm \text{ et } \dot{v}_1(t_1) = 70.71mm/s.$$

Le déplacement maximal est ensuite calculé :

$$v_{max} = v_{2max} = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}_1(t_1)}{\omega}\right)^2 + (v_1(t_1))^2} = 7.654mm \text{ atteint à l'instant } t_{pic} = 0.196s \text{ (voir la figure 2.34)}$$

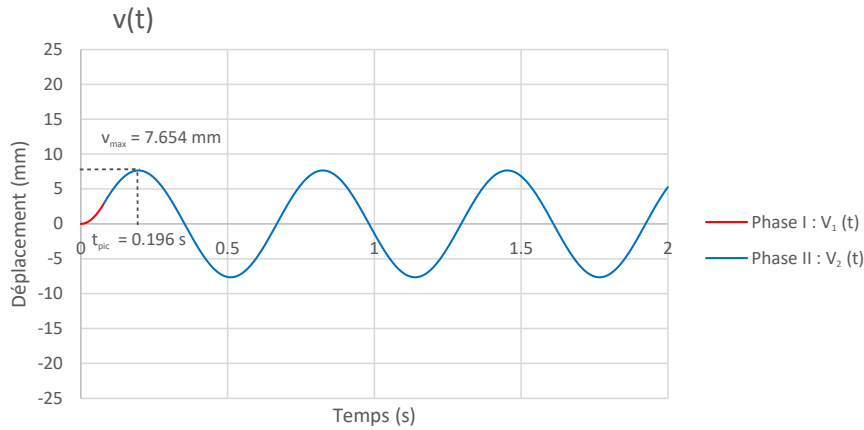


FIGURE 2.34 – Impulsion rectangulaire, le cas $t_1 < \frac{T}{2}$

2.4.3 Impulsion sinusoïdale

Soit une impulsion sinusoïdale appliquée sur une demi-période, tel que montré sur la figure 2.35

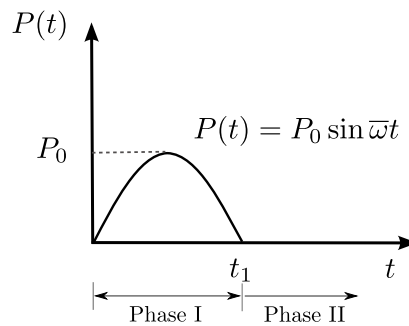


FIGURE 2.35 – Impulsion sinusoïdale

Phase I : $t \in [0, t_1]$, vibrations forcées, $P(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t$

$\bar{\omega}$ est la pulsation du chargement, et on appellera T_p la période du chargement.

La durée de l'impulsion est égale à la demi-période du chargement

$$t_1 = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\bar{\omega}} \quad (2.66)$$

L'expression du déplacement en phase I, est :

$$v_1(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega} t \quad (2.67)$$

Pour des conditions initiales au repos, $v_1(0) = 0$ et $\dot{v}_1(0) = 0$, on a :

$$v_1(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (2.68)$$

Exprimons les conditions finales de la phase I, $v_1(t_1)$ et $\dot{v}_1(t_1)$, qui représentent les conditions initiales de la phase II.

$$\begin{cases} v_1(t_1) = v_1\left(\frac{\pi}{\bar{\omega}}\right) = -\frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2} \sin \frac{\pi}{\beta} \\ \dot{v}_1(t_1) = \dot{v}_1\left(\frac{\pi}{\bar{\omega}}\right) = -\frac{P_0}{k} \frac{\bar{\omega}}{1-\beta^2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{\beta}\right) \end{cases} \quad (2.69)$$

Phase II : $t > t_1$, vibrations libres

L'expression de la réponse en phase II :

$$v_2(t) = \frac{\dot{v}_1(t_1)}{\omega} \sin \omega(t - t_1) + v_1(t_1) \cos \omega(t - t_1) \quad t > t_1 \quad (2.70)$$

Déplacement maximal

Cherchons d'abord le déplacement maximal dans la phase I, pour $t \in [0, t_1]$. Les pics sont atteints lorsque la vitesse est égale à zéro.

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) = 0 &\implies \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\bar{\omega} \cos \bar{\omega}t - \underbrace{\beta \omega}_{\bar{\omega}} \cos \omega t) = 0 \\ &\implies \cos \bar{\omega}t = \cos \omega t \\ &\implies \bar{\omega}t_{pic} = \pm \omega t_{pic} + 2n\pi \quad \text{avec } n = 0, \pm 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

La plus petite valeur de t_{pic} est obtenue en considérant le signe (-) pour $n = 1$, d'où

$$t_{pic} = \frac{2\pi}{\bar{\omega} + \omega}$$

Pour que le déplacement maximal soit atteint en phase I, il faut que

$$\begin{aligned} t_{pic} < t_1 &\implies \frac{2\pi}{\bar{\omega} + \omega} < \frac{\pi}{\bar{\omega}} \\ &\implies \frac{2\pi}{\bar{\omega}(1 + \frac{\omega}{\bar{\omega}})} < \frac{\pi}{\bar{\omega}} \\ &\implies \frac{2}{1 + \frac{1}{\beta}} < 1 \\ &\implies \boxed{\beta < 1} \end{aligned}$$

Donc pour que le maximum de la réponse soit atteint en phase I, il faut que $\beta < 1$.

Cette condition peut aussi s'écrire en fonction de la durée de l'impulsion comme suit :

La pulsation propre s'écrit : $\omega = \frac{2\pi}{T}$

La pulsation du chargement s'exprime selon l'équation 2.66 par : $\bar{\omega} = \frac{\pi}{t_1}$

d'où

$$\begin{aligned}\beta < 1 &\implies \frac{\bar{\omega}}{\omega} < 1 \\ &\implies \frac{\pi T}{t_1 2\pi} < 1 \\ &\implies \boxed{t_1 > \frac{T}{2}}\end{aligned}$$

Et dans ce cas le déplacement maximal est obtenu en remplaçant t par t_{pic} dans l'expression du déplacement de la phase I (équation 2.68)

$$\begin{aligned}v_{max} = v_1(t_{pic}) &= v_1\left(\frac{2\pi}{\bar{\omega} + \omega}\right) \\ &= \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \left(\sin \bar{\omega} \frac{2\pi}{\bar{\omega} + \omega} - \beta \sin \omega \frac{2\pi}{\bar{\omega} + \omega} \right)\end{aligned}$$

d'où le déplacement maximal, lorsqu'il est atteint en phase I,

$$\boxed{v_{max} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \left(\sin \frac{2\pi\beta}{1 + \beta} - \beta \sin \frac{2\pi}{1 + \beta} \right) \quad \text{pour } \beta < 1 \Leftrightarrow t_1 > \frac{T}{2}}$$

Le facteur d'amplification dynamique D s'exprime dans ce cas par :

$$\boxed{D = \frac{v_{max}}{v_{st}} = \frac{1}{1 - \beta^2} \left(\sin \frac{2\pi\beta}{1 + \beta} - \beta \sin \frac{2\pi}{1 + \beta} \right)}$$

Dans le cas où $\beta > 1 \Leftrightarrow t_1 < \frac{T}{2}$, le maximum de la réponse est atteint en phase II. A partir de l'expression de la réponse en phase II de l'équation 2.70, le déplacement maximal est :

$$v_{max} = v_{2max} = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}_1(t_1)}{\omega}\right)^2 + (v_1(t_1))^2}$$

en remplaçant les expressions de $v_1(t_1)$ et $\dot{v}_1(t_1)$ de l'équation 2.69 on a :

$$\begin{aligned}v_{max} &= \frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1 - \beta^2} \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{\beta} \right)} \\ &= \frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1 - \beta^2} \sqrt{2 \left(\underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{2\beta} + \sin^2 \frac{\pi}{2\beta}}_1 + \underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{2\beta} - \sin^2 \frac{\pi}{2\beta}}_{\cos \frac{\pi}{\beta}} \right)}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{v_{max} = 2 \frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1 - \beta^2} \cos \frac{\pi}{2\beta} \quad \text{pour } \beta > 1 \Leftrightarrow t_1 < \frac{T}{2}}$$

Le facteur d'amplification dynamique D est dans ce cas :

$$D = \frac{v_{max}}{v_{st}} = \frac{2\beta}{1-\beta^2} \cos \frac{\pi}{2\beta}$$

2.4.4 Impulsion triangulaire

Un système à un ddl est soumis à l'impulsion triangulaire, représentée sur la figure 2.4.4.

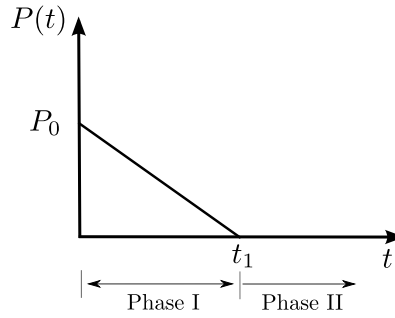


FIGURE 2.36 – Impulsion triangulaire

Phase I : $t \in [0, t_1]$, vibrations forcées, $P(t) = P_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$

La réponse générale en phase I, est exprimée par :

$$v_1(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{P_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \quad (2.71)$$

Pour des conditions initiales au repos :

$$\begin{cases} v_1(0) = 0 & \implies B = -\frac{P_0}{k} \\ \dot{v}_1(0) = 0 & \implies A = \frac{P_0}{k} \frac{1}{t_1 \omega} \end{cases} \quad (2.72)$$

d'où l'expression du déplacement :

$$v_1(t) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega t_1} - \cos \omega t - \frac{t}{t_1} + 1 \right) \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (2.73)$$

Les conditions finales de la phase I, sont

$$\begin{cases} v_1(t_1) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1} - \cos \omega t_1 \right) \\ \dot{v}_1(t_1) = \frac{P_0}{k} \omega \left(\frac{\cos \omega t_1}{\omega t_1} + \sin \omega t_1 - \frac{1}{\omega t_1} \right) \end{cases} \quad (2.74)$$

Phase II : $t > t_1$, vibrations libres

La réponse générale en phase II est :

$$v_2(t) = \frac{\dot{v}_1(t_1)}{\omega} \sin \omega(t - t_1) + v_1(t_1) \cos \omega(t - t_1) \quad t > t_1 \quad (2.75)$$

Réponse maximale : La recherche du déplacement maximal se fait de la même façon que pour les deux formes d'impulsions précédentes (rectangulaire et sinusoïdale).

Notons juste que, pour l'impulsion triangulaire, le maximum de la réponse est atteint en phase I si $t_1 \geq 0.4T$, et il est atteint en phase II lorsque $t_1 < 0.4T$.

2.4.5 Calcul approché de la réponse à un chargement par impulsion

Considérons un système à 1ddl (figure 2.37) initialement au repos, soumis à une impulsion (figure 2.38). Si la durée de l'impulsion est très courte comparée à la période propre du système, on peut la considérer comme un impact. L'impulsion représente dans ce cas un chargement ponctuel de vitesse, la durée du chargement est tellement courte que le système n'a pas le temps d'effectuer un déplacement durant l'intervalle de temps $[0, t_1]$.

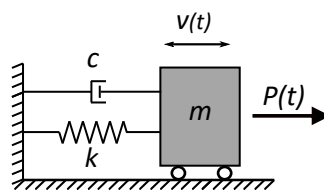


FIGURE 2.37 – système 1ddl : Modèle masse-ressort

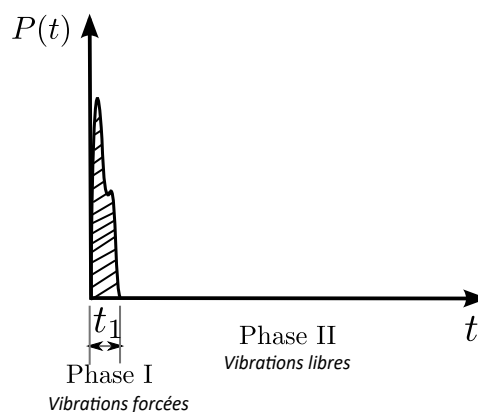


FIGURE 2.38 – Impulsion de très courte durée

Durant la **phase I**, $t \in [0, t_1]$,

- le déplacement est négligeable, ceci implique que la force élastique peut être considérée nulle.

$$f_s(t) = kv(t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq t_1$$

Le déplacement final de la phase I est donc nul.

$$v_1(t_1) = 0$$

- Si le système est amorti, la force d'amortissement sera négligeable aussi, car la phase I est tellement courte que l'amortissement n'a pas le temps d'agir.

$$c = 0 \implies f_D(t) = c\dot{v}(t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq t_1$$

Cependant la vitesse à la fin de la phase I n'est pas nulle. Pour l'exprimer on utilise la deuxième loi de Newton, elle stipule que la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces qui agissent sur le système.

$$\begin{aligned} \frac{d[m\dot{v}]}{dt} &= \sum F(t) \implies m \frac{d\dot{v}}{dt} = P(t) - \cancel{f_D(t)} - \cancel{f_s(t)} \\ &\implies m \int_0^{t_1} \frac{d\dot{v}}{dt} = \int_0^{t_1} P(t) \\ &\implies \dot{v}_1(t_1) = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} P(t) dt \end{aligned}$$

Phase II : $t \geq t_1$, vibrations libres

Premier cas : Système non-amorti

le déplacement en vibrations libres non-amorties s'exprime par :

$$v(t) = v_2(t) = A \sin \omega(t - t_1) + B \cos \omega(t - t_1)$$

A partir des conditions initiales de la phase I, on a :

$$\begin{cases} A = \frac{\dot{v}_1(t_1)}{\omega} = \frac{1}{m\omega} \int_0^{t_1} P(t) dt \\ B = v_1(t_1) = 0 \end{cases}$$

d'où l'expression de la réponse en phase II :

$$v(t) = \frac{1}{m\omega} \left(\int_0^{t_1} P(t) dt \right) \sin \omega(t - t_1) \quad t > t_1 \quad (2.76)$$

Remarque : L'intégrale $\int_0^{t_1} P(t) dt$ représente l'aire sous la courbe $P(t)$, c'est la surface hachurée de la figure 2.38)

Deuxième cas : Système amorti

le déplacement en vibrations libres amorties s'exprime par :

$$v(t) = v_2(t) = e^{-\xi\omega(t-t_1)}[A \sin \omega_D(t-t_1) + B \cos \omega_D(t-t_1)]$$

avec

$$B = v_1(t_1) = 0$$

et

$$A = \frac{v_1(t_1) + \xi\omega v_1(t_1)}{\omega_D} = \frac{v_1(t_1)}{\omega_D} = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^{t_1} P(t)dt$$

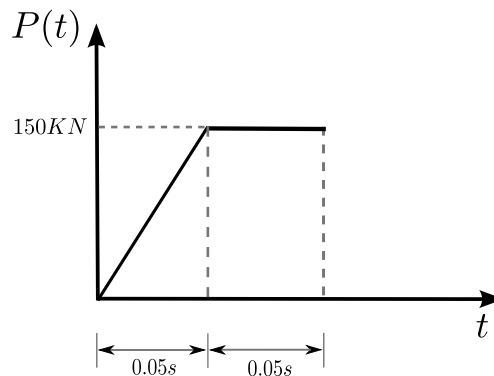
d'où l'expression du déplacement :

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \left(\int_0^{t_1} P(t)dt \right) e^{-\xi\omega(t-t_1)} \sin \omega_D(t-t_1) \quad (2.77)$$

Remarque : L'impulsion n'a fait que donner une vitesse initiale au système pour effectuer des vibrations libres.

2.4.6 Application

Soit un système à 1 ddl de masse $m = 8.12 \text{ tonnes}$, et de pulsation propre $\omega = 41 \text{ rd/s}$. La masse est soumise à l'impulsion représentée sur la figure ci-dessous. Calculons le déplacement maximal de la masse en utilisant le calcul approché.



En négligeant l'amortissement, le déplacement maximal peut être directement calculé d'après l'équation 2.76 par :

$$v_{max} = \frac{1}{m\omega} \int_0^{t_1} P(t)dt \quad \text{avec } t_1 = 0.1 \text{ s}$$

et comme $\int_0^{0.1} P(t)dt$ représente l'aire sous la courbe $P(t)$, alors :

$$v_{max} = \frac{1}{8.12 \times 41} [0.5(0.1 + 0.05)150] = 3.38 \times 10^2 \text{ m}$$

2.5 Réponse à un chargement dynamique quelconque : Intégrale de Duhamel

Pour calculer la réponse d'un système à 1ddl à un chargement dynamique quelconque $P(t)$, on suppose que la fonction de force est composée d'une série d'impulsions de très courtes durées (figure 2.39).

Pendant la fraction de temps $d\tau$, la force fait subir à la structure une impulsion élémentaire $P(\tau)d\tau$.

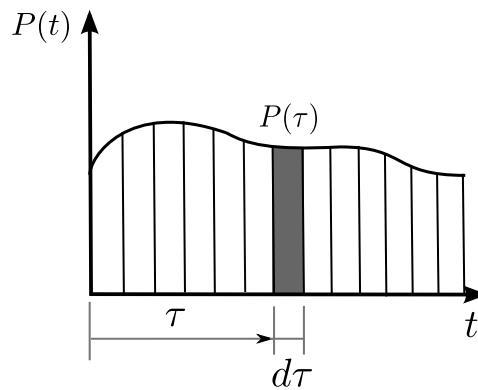


FIGURE 2.39 – Chargement dynamique quelconque

Pour des conditions initiales au repos, exprimons la réponse au chargement $P(t)$, dans les deux cas des systèmes : amorti et non-amorti

2.5.1 Système non-amorti

Pour $t > \tau$, la réponse produite par l'impulsion élémentaire $P(\tau)d\tau$ est donnée par :

$$dv(t) = \frac{P(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad t > \tau \quad (2.78)$$

En intégrant la réponse élémentaire de 0 à t , on obtient la réponse complète du système au chargement $P(t)$.

$$v(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (2.79)$$

L'équation 2.79 représente la réponse générale d'un système à 1ddl non-amorti à une force dynamique quelconque $P(t)$ pour des conditions initiales au repos, c'est l'intégrale de Duhamel pour les systèmes non-amortis.

Dans le cas où le déplacement initial $v(0)$ et/ou la vitesse initiale $\dot{v}(0)$ ne sont pas nuls, la réponse en déplacement s'exprime alors par l'équation 2.80.

$$v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin \omega t + v(0) \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (2.80)$$

2.5.2 Système amorti

En présence de l'amortissement, la réponse en vibrations libres induite par l'impulsion élémentaire $P(\tau)d\tau$ s'exprime par l'équation 2.81 pour $t > \tau$:

$$dv(t) = \frac{1}{m\omega_D} P(\tau) d\tau e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t - \tau) \quad t > \tau \quad (2.81)$$

En intégrant la réponse élémentaire de 0 à t , on obtient la réponse complète du système.

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t - \tau) d\tau \quad (2.82)$$

L'équation 2.82 représente l'intégrale de Duhamel pour les systèmes amortis, elle exprime la réponse générale d'un système à 1ddl amorti à une excitation dynamique quelconque $P(t)$ pour des conditions initiales au repos, c'est .

Pour des conditions initiales quelconques ($\dot{v}(0) \neq 0$, et/ou $v(0) \neq 0$), l'expression de la réponse devient :

$$v(t) = e^{-\xi\omega(t-t_1)} \left[\frac{\dot{v}_1(0) + \xi\omega v_1(0)}{\omega_D} \sin \omega_D(t - \tau) + v(0) \cos \omega_D(t - \tau) \right] + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t - \tau) d\tau$$

Remarque : vue la complexité de son calcul, l'intégrale de Duhamel nécessite en général un calcul numérique.

2.5.3 Application

Déterminer l'expression de la réponse d'un système à 1ddl non-amorti, de pulsation propre ω , à une force constante P_0 pour des conditions initiales au repos.

En utilisant l'intégrale de Duhamel, le déplacement s'exprime par :

$$v(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

Dans ce cas, $P(\tau) = P_0$, d'où

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau \\&= \frac{P_0}{m\omega} \left(-\frac{1}{-\omega} \cos \omega(t - \tau) \right)_0^t \\&= \frac{P_0}{m\omega^2} (\cos(0) - \cos(\omega t)) \\&= \frac{P_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$v(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t)$$

2.6 Spectre de réponse

Lorsqu'on recherche la réponse sismique d'une structure, on détermine d'abord l'expression du chargement sismique. Ce dernier est généralement donné sous forme d'un accélérogramme représentant l'accélération du sol en fonction du temps. L'accélérogramme peut être enregistré lors d'un séisme ou généré de manière artificielle, on peut voir sur la figure 2.40 l'exemple de l'accélérogramme enregistré à Azazga (la composante Est-West) lors du séisme de Boumerdès de 2003.

Une analyse dynamique permettra de calculer la réponse à l'excitation sismique à tout instant t . Dans le cadre de ce cours, le comportement des structures est considéré élastique linéaire.

Si on ne s'intéresse qu'à la réponse maximale de la structure, c'est le cas par exemple des études de dimensionnement, il n'est pas indispensable d'avoir la variation du chargement dans le temps (l'accélérogramme), le spectre de réponse constitue dans ce cas une donnée suffisante.

2.6.1 Réponse sismique d'un système à un degré de liberté

Soit un système à 1 ddl de masse m , de rigidité k , et de constante d'amortissement c , soumis à une excitation sismique donnée sous forme d'un accélérogramme appliqué à sa base (figure 2.40). Considérons l'exemple de l'accélérogramme de Azazga-EW.

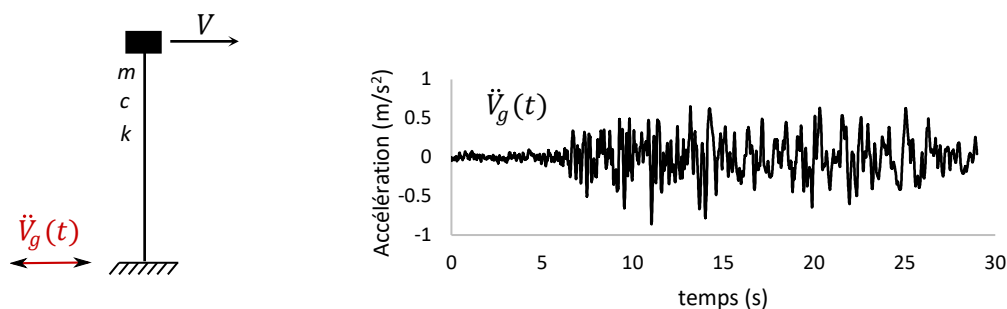


FIGURE 2.40 – Système à 1ddl - Accélérogramme de Azazga-EW

L'équation de mouvement du système en déplacement relatif s'écrit

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv = -m\ddot{v}_g(t) \quad (2.83)$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega\dot{v}(t) + \omega^2v = -\ddot{v}_g(t) \quad (2.84)$$

La solution de cette équation est donnée par l'intégrale de Duhamel

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \quad (2.85)$$

où $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ est la pulsation amortie

L'équation 2.85 représente la réponse, en régime général, du système à 1ddl pour des conditions initiales au repos. Le chargement appliqué à la masse étant $P(t) = -m\ddot{v}_g(t)$, alors l'équation 2.85 devient

$$v(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \quad (2.86)$$

Cette réponse ne dépend que de deux paramètres liés au système, le taux d'amortissement critique ξ et la pulsation propre ω ou bien la période propre T .

2.6.2 Spectres de réponse exacts

Intéressons nous maintenant à la réponse maximale du système à 1ddl lorsqu'il est soumis à l'accélérogramme de Azazga-EW. Le déplacement relatif maximal est donné par :

$$v_{max} = |v(t)|_{max} = \left| -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \right|_{max} = S_d(\xi, T) \quad (2.87)$$

Cette valeur maximale qu'on appellera S_d ne dépend que de ξ et de T .

Fixons la valeur de ξ , par exemple $\xi = 5\%$, et calculons le déplacement relatif maximal pour différentes valeurs de la période T . En reportant sur un graphe les valeurs de la période sur l'axe des abscisses et les valeurs du déplacement relatif maximal correspondant (en valeurs absolues) sur l'axe des ordonnées on obtient le **spectre de réponse en déplacement relatif de l'accélérogramme de Azazga-EW pour $\xi = 5\%$** , tel que montré sur la figure 2.41.

Si on refait le même processus pour différentes valeurs de ξ on obtient un groupe de spectres de déplacement relatif, chacun correspondant à un ξ donné, tel que montré sur la figure 2.42.

De la même manière on peut construire le spectre de vitesse relative de l'accélérogramme en calculant la vitesse relative maximale pour différentes valeurs de ξ et T , qu'on nommera $S_v(\xi, T)$

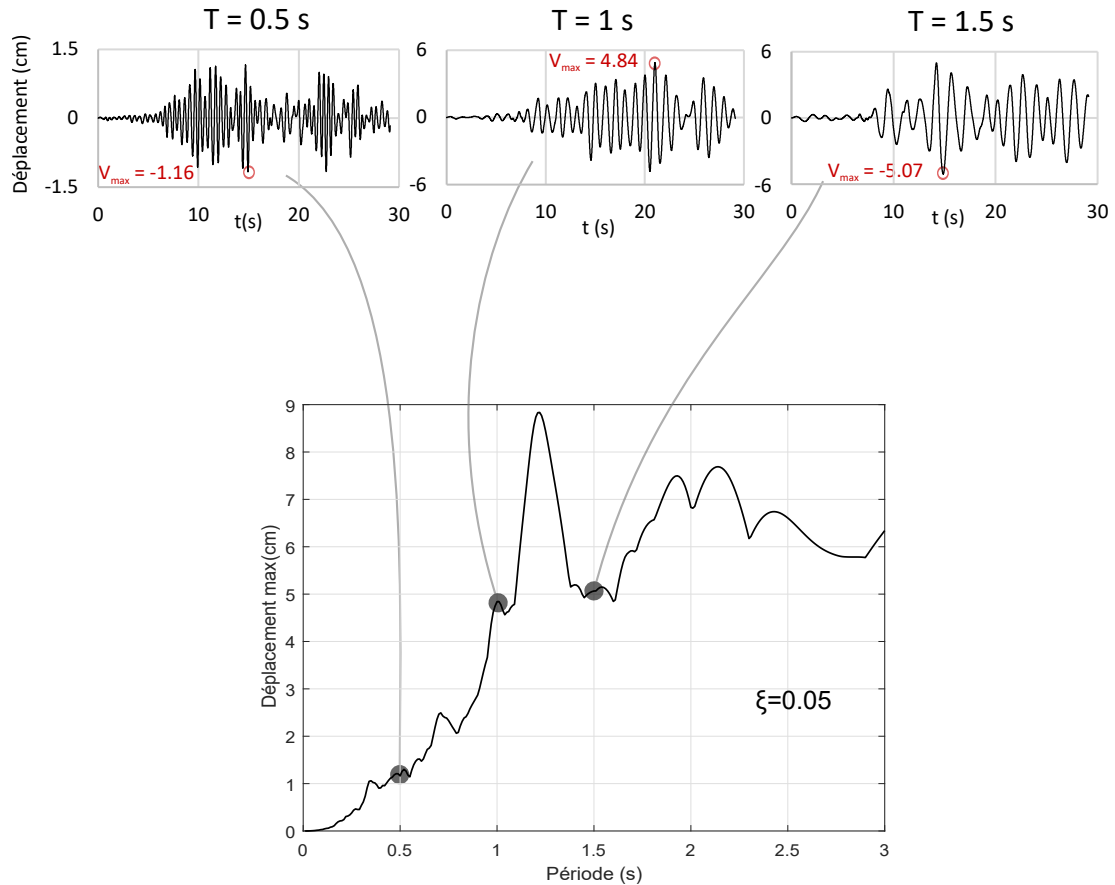


FIGURE 2.41 – Construction du spectre de déplacement relatif de l'accélérogramme de Azazga-EW pour $\xi = 5\%$

$$\dot{v}_{max} = |\dot{v}(t)|_{max} = \left| \frac{dv(t)}{dt} \right|_{max} = S_v(\xi, T) \quad (2.88)$$

On peut aussi construire le spectre d'accélération absolue, nommé $S_a(\xi, T)$. L'accélération absolue $\ddot{v}^a(t)$ étant la somme de l'accélération relative de la masse et de l'accélération de la base.

$$\ddot{v}_{max}^a = |\ddot{v}(t) + \ddot{v}_g(t)|_{max} = \left| \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \ddot{v}_g(t) \right|_{max} = S_a(\xi, T) \quad (2.89)$$

Pour résumer on peut définir le spectre de réponse comme étant la courbe qui donne la réponse maximale à une excitation sismique (en terme de déplacement, de vitesse ou d'accélération) d'un système à 1 ddl en fonction de la période propre T pour un taux d'amortissement critique donné ξ .

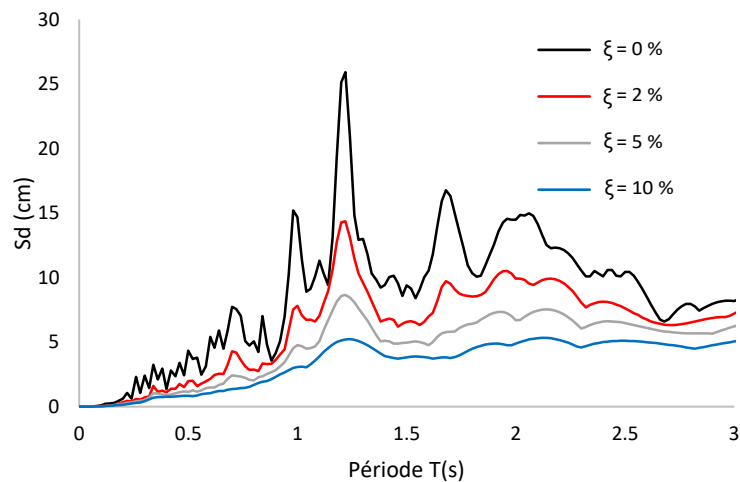


FIGURE 2.42 – Spectres de déplacement relatif de l'accélérogramme Azazga-EW

2.6.3 Pseudo-Spectres de réponse

En exploitant le fait que pour les structures de génie civil, les valeurs de ξ soient relativement petites, les expressions exactes des spectres, de vitesse relative et d'accélération absolue se simplifient et sont dans ce cas appelés des pseudo-spectres. Cette simplification conduit à une relation très intéressante (l'équation 2.90) entre le spectre de déplacement relatif S_d , le pseudo-spectre de vitesse relative S_v et le pseudo-spectre d'accélération absolue S_a

$$S_a = \omega S_v = \omega^2 S_d \quad (2.90)$$

Par exemple, les pseudo-spectres d'accélération absolue de l'accélérogramme Azazga-EW peuvent être directement déduits des spectres de déplacement relatif de la figure 2.42 en les multipliant tout simplement par ω^2 , tel que représenté sur la figure 2.43

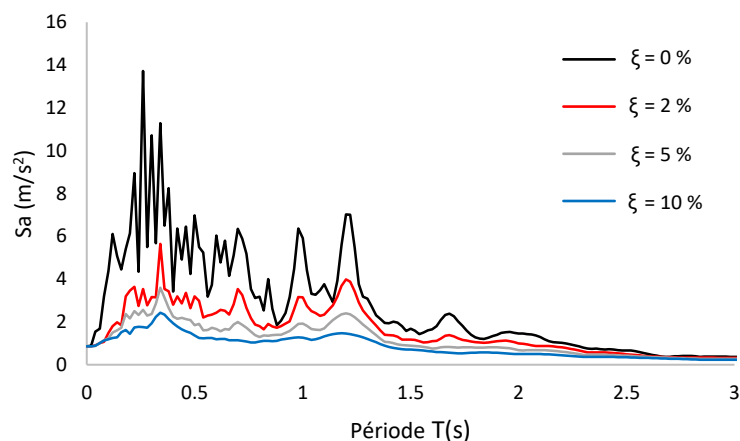


FIGURE 2.43 – Pseudo-spectres d'accélération absolue de l'accélérogramme Azazga-EW

L'utilisation des pseudo-spectres dans le calcul sismique des structures, permet de déduire les valeurs spectrales en ayant uniquement l'un des trois spectres. La valeur de la pulsation permet de passer d'un spectre aux deux autres.

L'avantage d'avoir un spectre de réponse comme donnée de l'excitation sismique est de permettre par une simple lecture d'avoir la réponse maximale d'un système à 1 ddl de caractéristiques ξ et T . L'effort maximal à la base T_{max} est aussi directement déduit

$$\begin{aligned} T_{max} &= kv_{max} \\ &= kS_d = k \frac{S_v}{\omega} = k \frac{S_a}{\omega^2} \end{aligned}$$

On emploie souvent le pseudo-spectre d'accélération absolue dans le calcul sismique des structures, notamment dans les règlements parasismiques. Ceci fait que l'effort à la base est obtenu en multipliant la masse du système par la valeur spectrale S_a correspondant aux caractéristiques ξ et T du système.

$$T_{max} = \frac{k}{\omega^2} S_a = m S_a$$

Discussion

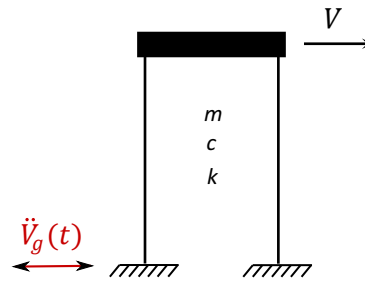
- En plus de fournir directement la réponse maximale, le pseudo-spectre d'accélération informe sur le contenu fréquentiel de l'excitation sismique; il montre l'amplification du mouvement sismique pour chaque période. Notons aussi qu'il ne fournit pas à quel instant le maximum de la réponse est atteint, cette information nécessite le calcul de la réponse temporelle.

- En observant les pseudo-spectres de la figure 2.43 on remarque que quelque soit la valeur de ξ , toutes les courbes commencent par le même point à $T = 0$. Ceci s'explique par le fait que lorsque la période du système est nulle, sa pulsation tend donc vers l'infini, la masse du système ne bouge pratiquement plus par rapport à la base, le système n'a plus de déplacement relatif ($v(t) = 0$). Dans ce cas l'unique mouvement du système provient de la base, l'accélération absolue maximale de la masse est égale à l'accélération maximale de la base (du sol) et ce quelque soit la valeur de ξ .

2.6.4 Application : Utilisation du spectre d'un accélérogramme

Soit le portique de la figure ci-dessous soumis à l'accélérogramme de Azazga-EW, enregistré lors du séisme de Boumerdès de 2003. Calculer l'effort tranchant maximal à la base du portique.

Données :



Portique : $m = 29.23$ tonnes, $k = 7233.8$ KN/m, $\xi = 10\%$

Excitation : Pseudo-spectre d'accélération absolue de l'accélérogramme de Azazga-EW pour $\xi = 10\%$ (figure 2.44)

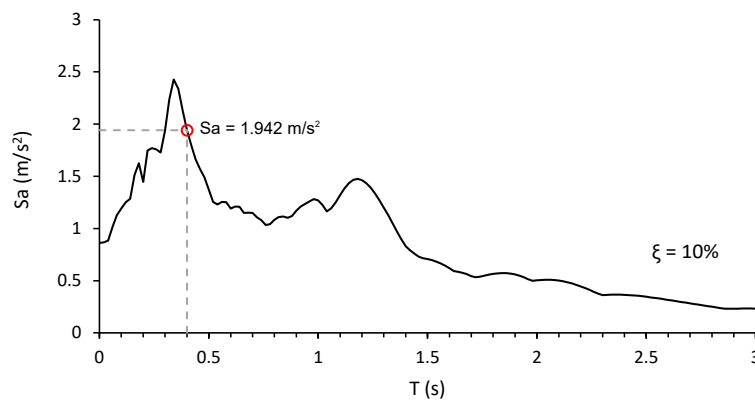


FIGURE 2.44 – Pseudo-spectre d'accélération absolue de l'accélérogramme de Azazaga-EW pour $\xi = 10\%$

Réponse :

Rappelons que le spectre de réponse représente la réponse maximale d'un système à 1 ddl caractérisé par sa période et son taux d'amortissement critique. Cette réponse peut être donnée sous forme de déplacement relatif maximal ($v_{max} = S_d(\xi, T)$), de vitesse relative maximale ($\dot{v}_{max} = S_v(\xi, T)$) ou bien d'accélération absolue maximale ($\ddot{v}_{max}^a = S_a(\xi, T)$).

Le taux d'amortissement critique du portique étant donné $\xi = 10\%$, déterminons sa période propre T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{7233.8}{29.23}}} = 0.4s$$

Maintenant il suffit d'aller sur la courbe du pseudo-spectre d'accélération absolue correspondant à $\xi = 10\%$ et de lire la valeur de S_a correspondant à la valeur de la

période (figure 2.44)

$$S_a = 1.942 \text{ m/s}^2$$

Et aussi simple que ça en a l'air l'effort tranchant à la base est

$$T_{max} = mS_a = 29.23 \times 1.942 = 56.76 \text{ KN}$$

Remarque : Si on veut connaître le déplacement relatif maximal de la masse, il suffit d'appliquer la relation 2.90 :

$$v_{max} = S_d = \frac{S_a}{\omega^2} = \frac{1.942}{(15.73)^2} = 7.85 \times 10^{-3} \text{ m}$$

2.6.5 Spectre de réponse réglementaire

- Pour déterminer les efforts maximaux induits par un séisme, il n'est pas nécessaire d'avoir l'accélérogramme, le pseudo-spectre de réponse en accélération absolue est suffisant.
- Le dimensionnement des structures nécessite d'avoir la réponse maximale à un séisme futur. Ceci a amené à construire des spectres réglementaires de calcul à partir de traitements statistiques d'une multitude de spectres d'enregistrements sismiques réels.
- Le concept de spectre de réponse permet de définir une sollicitation pour des structures dans une zone sismique donnée.

Spectre de calcul RPA99/2003

Le spectre de calcul RPA99/2003 est donné en pseudo-accélération absolue S_a par rapport à l'accélération de la pesanteur g (équation 2.91). Il est constitué de quatre branches délimitées par des valeurs de périodes caractéristiques.

$$\frac{S_a}{g} = \begin{cases} 1.25A \left(1 + \frac{T}{T_1} \left(2.5\eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{Q}{R} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{Q}{R} \right) \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3 \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{T} \right)^{5/3} \left(\frac{Q}{R} \right) & T > 3 \end{cases} \quad (2.91)$$

Les expressions du spectre s'écrivent en fonction d'un certain nombre de paramètres :
A : Coefficient d'accélération de zone, il dépend de la zone sismique et du groupe d'usage (l'importance) de la structure étudiée.

T_1, T_2 : Périodes caractéristiques associées à la nature du sol.

R : Coefficient de comportement global de la structure. Il dépend du type de système de contreventement. La valeur de R permet de tenir compte du comportement non-linéaire de la structure, une valeur de $R = 1$, rend le spectre élastique, elle est utilisée lorsqu'on admet que les déformations de la structure étudiée sont réversibles. Par contre une valeur supérieure à un, c'est le cas des structures étudiées selon RPA, veut dire qu'on admet des déformations irréversibles après l'application de l'excitation sismique, ceci permet d'exploiter la ductilité de la structure.

Q : Facteur de qualité de la structure. Il est fonction de la redondance et de la géométrie des éléments qui la constituent, de la régularité en plan et en élévation et de la qualité du contrôle de la construction.

η : Facteur de correction d'amortissement pour les valeurs de ξ différentes de 5%.

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{2 + \xi}} \geq 0.7$$

ξ : Le taux d'amortissement critique de l'ouvrage exprimé en pourcentage. Il dépend du matériau constitutif, du type de structure et de l'importance des remplissages. $\eta = 1$ pour $\xi = 5\%$.

2.6.6 Application : Utilisation du spectre de calcul RPA99/2003

Déterminer la réponse maximale d'une structure à un séisme futur nécessite dans un premier temps de classer la structure étudiée selon les critères du RPA99/2003, ceci permet de définir les paramètres nécessaires pour construire le spectre.

Prenons l'exemple d'un système à 1ddl de masse $m = 409.35\text{tonnes}$, et de rigidité $k = 36000\text{KN/m}$, constitué de portiques auto-stables en BA avec remplissages en maçonnerie rigide ($R = 3.5$, $\xi = 7\%$), d'importance moyenne (groupe d'usage 2), situé en zone sismique III ($A = 0.25$), et implanté sur un sol meuble S3 ($T_1 = 0.15\text{s}$ et $T_2 = 0.5\text{s}$). On prend la valeur $Q = 1.2$ pour les pénalisations sur la structure.

L'effort tranchant maximal à la base de la structure est

$$T_{max} = mS_a = mg \frac{S_a}{g}$$

d'où

$$T_{max} = W \frac{S_a}{g}$$

W est le poids de la structure.

On calcule la période propre du système

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{36000}{409.35}}} = 0.67 \text{ s}$$

Il suffit maintenant d'aller sur les expressions du spectre (l'équation 2.91) et de situer la période par rapport aux quatre branches. On voit bien que $0.5\text{s} \leq 0.67\text{s} \leq 3\text{s}$ ce qui correspond à la troisième branche du spectre ($T_2 \leq T \leq 3\text{s}$). La valeur de S_a/g correspondante se calcule avec l'expression

$$\frac{S_a}{g} = 2.5\eta(1.25A)\left(\frac{Q}{R}\right)\left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3}$$

ce qui donne

$$\frac{S_a}{g} = 2.5 \times 0.882(1.25 \times 0.25)\left(\frac{1.2}{3.5}\right)\left(\frac{0.5}{0.67}\right)^{2/3} = 0.194$$

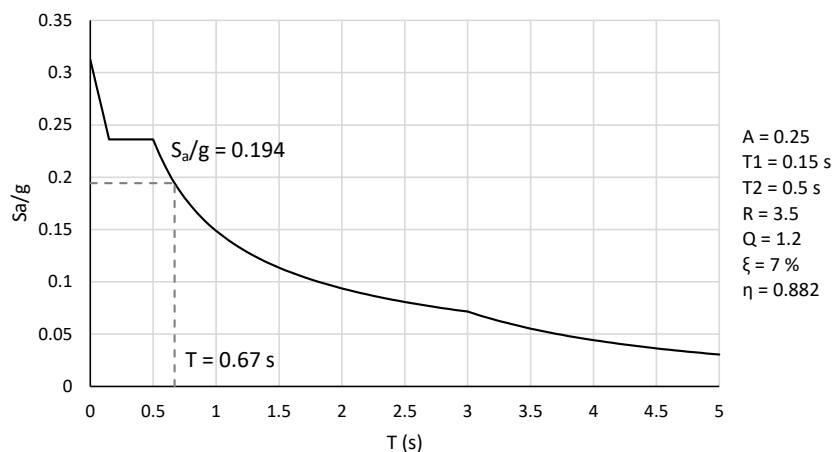


FIGURE 2.45 – Spectre RPA

le spectre de l'équation 2.91 est représenté sur la figure 2.45 où on a repéré le point correspondant à la structure étudiée. La valeur de S_a/g est bien située sur la troisième branche du spectre.

L'effort tranchant maximal à la base du système est

$$T_{max} = 409.35 \times 9.81(0.194) = 780.47 \text{ KN}$$

Remarque : Le spectre réglementaire peut aussi bien être utilisé pour les systèmes à 1 ddl que pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté, c'est d'ailleurs la donnée de base de la méthode spectrale modale.

Spectre de calcul RPA 2024

Le spectre de calcul RPA 2024 est issu des modifications apportées au spectre de calcul RPA99/2003. L'action sismique horizontale est représentée par un spectre de calcul donné en terme de pseudo-accélération absolue S_a par rapport à l'accélération de la pesanteur g (équation 2.92). Il est constitué de quatre branches délimitées par des valeurs de périodes caractéristiques.

$$\frac{S_a d}{g} = \begin{cases} A.I.S. \left(\frac{2}{3} + \frac{T}{T_1} \left(2.5 \frac{Q_F}{R} - \frac{2}{3} \right) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ A.I.S. \left(2.5 \frac{Q_F}{R} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ A.I.S. \left(2.5 \frac{Q_F}{R} \right) \left(\frac{T_2}{T} \right) & T_2 \leq T \leq T_3 \\ A.I.S. \left(2.5 \frac{Q_F}{R} \right) \left(\frac{T_2 \cdot T_3}{T^2} \right) & T_3 \leq T \leq 4s \end{cases} \quad (2.92)$$

Les expressions du spectre s'écrivent en fonction d'un certain nombre de paramètres :
 A : coefficient d'accélération moyen de calcul pour un sol de classe S1 pour la période de retour de non effondrement $T_r=475$ ans, il dépend de la zone sismique ;

I : coefficient d'importance, il dépend du groupe d'importance du bâtiment (1A, 1B, 2 et 3) ;

S : coefficient de site ;

Q_F : Facteur de qualité de la structure.

R : Coefficient de comportement global de la structure. Il dépend du type de système de contreventement. La valeur de R permet d'exploiter la ductilité de la structure donc de tenir compte de son comportement non-linéaire ;

Il est à noter que la valeur de R , est corrigée par le coefficient de qualité, Q_F , qui permet de tenir compte du degré de régularité et de la redondance du système de contreventement.

T : période de vibration d'un système linéaire à un seul degré de liberté ;

T_1 et T_2 : représentent respectivement, la limite inférieure et la limite supérieure des périodes correspondant au palier d'accélération spectrale constante ;

T_3 : valeur définissant le début de la branche à déplacement spectral constant.

Les valeurs de T_1 , T_2 et S , dépendent du niveau de sismicité et de la classe de sol.

Avant de pouvoir utiliser le spectre RPA2024, il faut classer la structure pour pouvoir déterminer ses caractéristiques spectrales.

Chapitre 3

Systemes à plusieurs degrés de liberté

3.1 Introduction

Le choix du nombre de degrés de liberté (ddl) est dicté par la nature du problème étudié. Si une structure possède plus d'un mode de déplacement, alors l'expression de sa réponse dynamique doit être représentée par plusieurs coordonnées de déplacement. Le problème à résoudre doit donc comporter plusieurs degrés de liberté.

3.2 Modélisation

3.2.1 Méthode des éléments finis

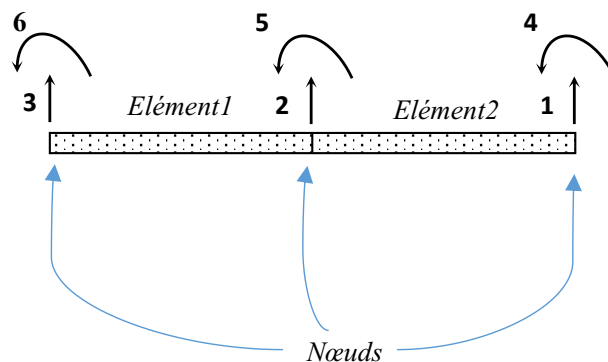


FIGURE 3.1 – Représentation des ddl : Eléments finis

Le nombre de ddl est égal au nombre de possibilités de mouvements des nœuds. L'exemple de la figure 3.1 représente une poutre décomposée en deux éléments. En

considérant la translation verticale et la rotation dans chacun des trois nœuds, en se retrouve avec un problème à six degrés de liberté.

3.2.2 Méthode des masses concentrées

Le nombre de ddl est égal au nombre de possibilités de mouvements des points de concentration des masses.

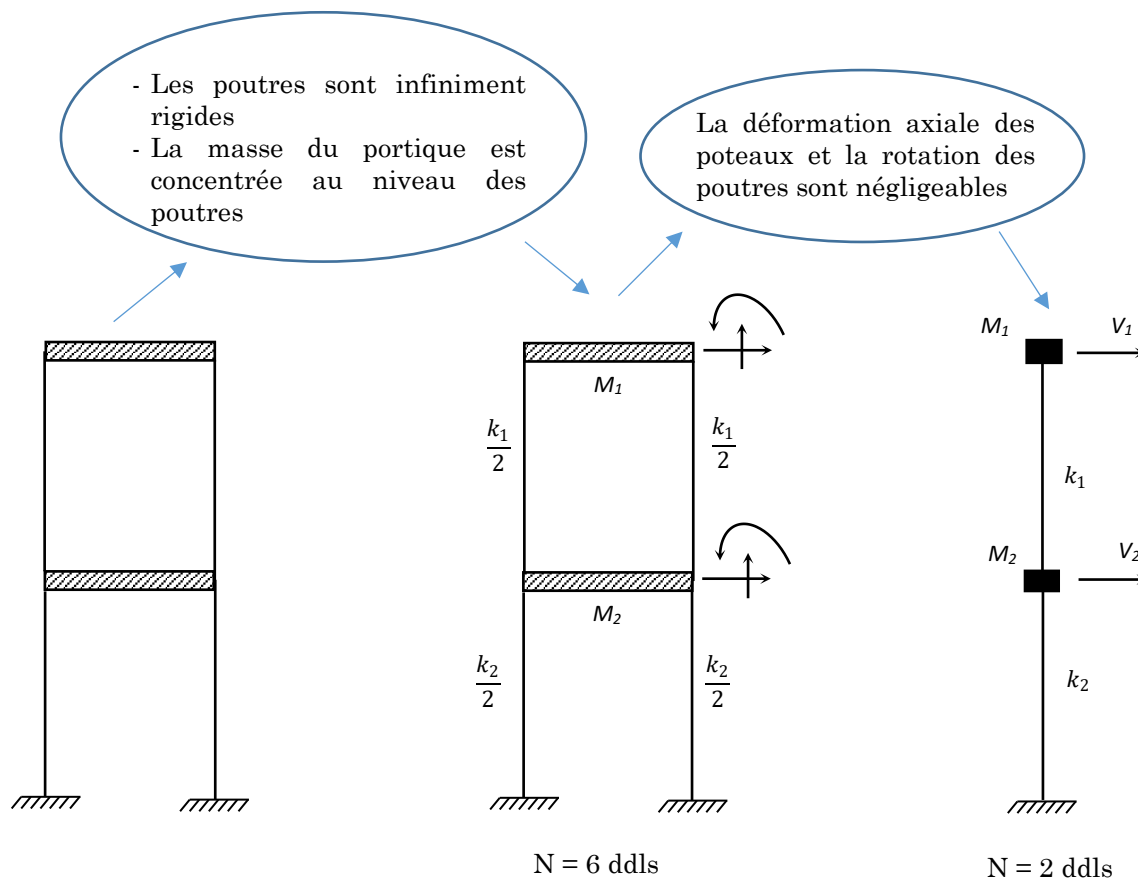


FIGURE 3.2 – Représentation des ddl : Masses concentrées

L'exemple bidimensionnel d'un portique à deux niveaux est schématiquement représenté sur la figure 3.2. Le nombre N de degrés de liberté dépend des hypothèses retenues dans l'étude.

Avec les deux ddl de translation (V_1 et V_2), le portique peut très bien être représenté par un modèle simplifié constitué de masses et de ressorts, tel que montré sur la figure 3.3. L'amortissement n'étant pas considéré dans cet exemple.

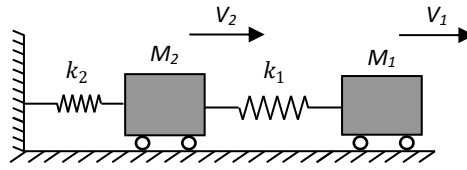


FIGURE 3.3 – Modèle masses-ressorts à deux degrés de liberté

3.3 Formulation des équations de mouvement : Expression de l'équilibre dynamique

L'équation de mouvement d'un système à N degrés de liberté s'exprime en écrivant l'équilibre des forces associées à chaque degré de liberté i (l'équation 3.1).

$$f_{Ii}(t) + f_{Di}(t) + f_{Si}(t) = P_i(t) \quad i = 1, N \quad (3.1)$$

$f_{Ii}(t)$, $f_{Di}(t)$, et $f_{Si}(t)$ représentent, respectivement, les forces d'inertie, d'amortissement et élastique associées au ddl i . $P_i(t)$ représente le chargement appliqué au niveau du ddl i .

Sous l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire, chaque force élastique associée à un ddl i dépend des composantes de déplacement de tous les ddls (continuité de la rigidité). En considérant l'exemple de la figure 3.4 d'une poutre avec trois ddls, les forces élastiques associées aux trois ddls s'écrivent comme suit :

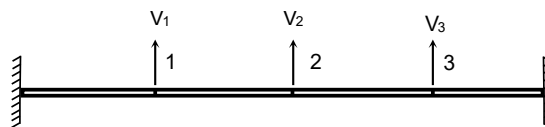


FIGURE 3.4 – Système à trois degrés de liberté

$$f_s(t) = \begin{bmatrix} f_{S1}(t) = k_{11} V_1(t) + k_{12} V_2(t) + k_{13} V_3(t) \\ f_{S2}(t) = k_{21} V_1(t) + k_{22} V_2(t) + k_{23} V_3(t) \\ f_{S3}(t) = k_{31} V_1(t) + k_{32} V_2(t) + k_{33} V_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Les éléments k_{ij} de la matrice rigidité sont appelés coefficients d'influence de rigidité. Un élément k_{ij} peut être défini comme étant la force correspondant au ddl (i) induite par un déplacement unitaire du ddl (j). Le vecteur force élastique peut s'écrire sous la forme du produit de la matrice rigidité $[K]$ et du vecteur déplacement $V(t)$, $f_s(t) = [K]V(t)$.

$$f_s(t) = \begin{Bmatrix} f_{S1}(t) \\ f_{S2}(t) \\ f_{S3}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Avec le même raisonnement, on peut écrire le vecteur force d'amortissement sous la forme du produit de la matrice amortissement $[C]$ et du vecteur vitesse $\dot{V}(t)$, soit $f_D(t) = [C]\dot{V}(t)$.

$$f_D(t) = \begin{Bmatrix} f_{D1}(t) \\ f_{D2}(t) \\ f_{D3}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \\ \dot{V}_3(t) \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Chaque élément c_{ij} , appelé coefficient d'influence d'amortissement, représente la force correspondant au ddl (i) induite par une vitesse unitaire du ddl (j).

Aussi, le vecteur force d'inertie peut s'écrire sous la forme $f_I(t) = [M]\ddot{V}(t)$, le produit de la matrice masse $[M]$ et du vecteur accélération $\ddot{V}(t)$.

$$f_I(t) = \begin{Bmatrix} f_{I1}(t) \\ f_{I2}(t) \\ f_{I3}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{V}_1(t) \\ \ddot{V}_2(t) \\ \ddot{V}_3(t) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Les éléments m_{ij} sont les coefficients d'influence de masse. Un élément m_{ij} représente la force correspondant au ddl (i) induite par une accélération unitaire du ddl (j).

L'équilibre dynamique global de la structure de la figure 3.4 peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$[M]\ddot{V}(t) + [C]\dot{V}(t) + [K]V(t) = P(t) \quad (3.6)$$

$P(t)$ est le vecteur chargement, ces composantes $P_i(t)$ représentent les forces appliquées aux trois ddls ($i = 1, 3$).

3.4 Détermination des matrices caractéristiques

3.4.1 Matrice rigidité $[K]$

Avant de déterminer les éléments de la matrice rigidité, examinons d'abord la signification physique d'un coefficient d'influence de rigidité k_{ij} . Par définition, il représente la force au ddl i due à un déplacement unitaire au ddl j , pendant que tous

les autres ddl sont maintenus fixes, on peut par exemple leur imposer des appuis fictifs.

Prenons l'exemple de la poutre à trois ddl de la figure 3.4. Si on veut voir l'effet d'un déplacement correspondant à un seul ddl indépendamment des autres ddl, on procède comme suit. On applique un déplacement unitaire au ddl 1 ($V_1 = 1$) et on applique des appuis fictifs au niveau des ddl 2 et 3 pour les bloquer. La force induite au ddl 1 est celle causée par un déplacement unitaire au ddl 1, par définition cette force représente le coefficient d'influence de rigidité k_{11} . Les forces induites aux ddl 2 et 3 sont, respectivement, k_{21} et k_{31} . On refait l'expérience en appliquant un déplacement unitaire au ddl 2, puis au ddl 3, tel que schématisé sur la figure 3.5.

En superposant les effets des trois déplacements, la force élastique f_{si} correspondant au ddl i est la somme de la force au ddl i induite par le déplacement du ddl 1 ($k_{i1} V_1$), de la force au ddl i induite par le déplacement du ddl 2 ($k_{i2} V_2$), et de la force au ddl i induite par le déplacement du ddl 3 ($k_{i3} V_3$) (Equation 3.7).

$$f_{si}(t) = k_{i1} V_1(t) + k_{i2} V_2(t) + k_{i3} V_3(t), \quad i = 1, 3 \quad (3.7)$$

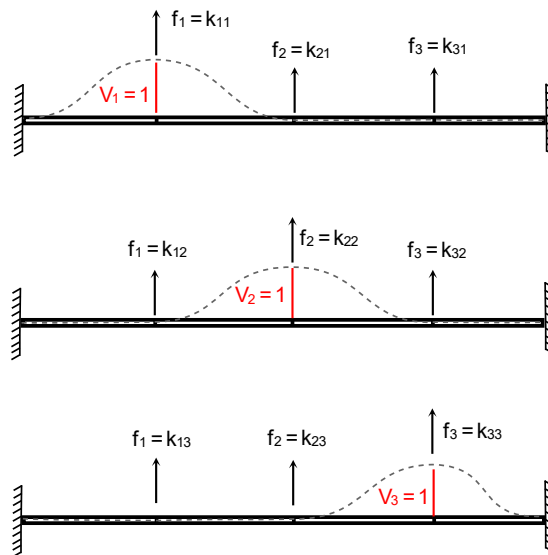


FIGURE 3.5 – Signification physique des coefficients d'influence k_{ij}

Pour une structure donnée, la détermination de la matrice rigidité globale par éléments finis revient à assembler les matrices élémentaires de chaque élément de la poutre. Le problème se réduit alors à la détermination de la matrice rigidité d'un élément de référence.

Considérons un élément poutre de longueur L , de module d'élasticité E et de moment

d'inertie de flexion $I(x)$ comme montré sur la figure 3.6. Un tel élément est assemblé à la structure complète par ces deux nœuds. Les degrés de liberté de cet élément sont les translations verticales (V_1 et V_2) et les rotations des nœuds (θ_1 et θ_2). Les degrés de liberté sont numérotés ici de sorte à écrire le vecteur déplacement comme suit :

$$V(t) = \begin{Bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \\ V_4(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

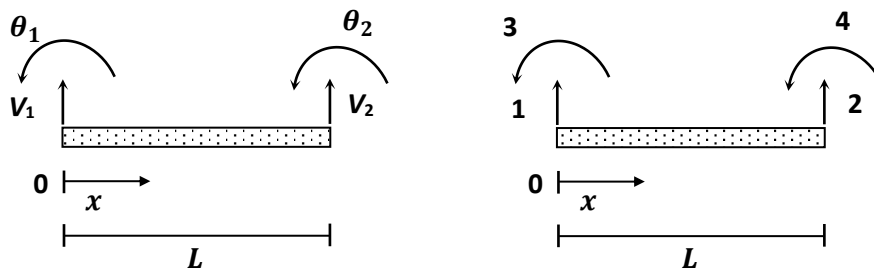


FIGURE 3.6 – Élément de référence à quatre degrés de liberté

Appliquons un déplacement unitaire correspondant au ddl 1, c-à-d une translation verticale unitaire de l'extrémité gauche de l'élément de référence ($V_1 = 1$), les autres ddls sont maintenus fixes. La déformée induite peut être exprimée par le polynôme d'ordre trois $\psi_1(x)$. La déformée induite par l'application d'une rotation unitaire au nœud gauche de l'élément de référence ($V_3 = \theta_1 = 1$) est représentée par le polynôme d'ordre trois nommé $\psi_3(x)$. En appliquant un déplacement unitaire puis une rotation unitaire à l'extrémité droite de l'élément de référence, on obtient les déformées $\psi_2(x)$ et $\psi_4(x)$, respectivement, comme montré sur la figure 3.7. Le déplacement vertical $y(x)$ d'un point quelconque de l'élément s'écrit $y(x) = \psi_1(x)V_1 + \psi_2(x)V_2 + \psi_3(x)V_3 + \psi_4(x)V_4$. les fonctions $\psi_i(x)$, données ci-après, représentent les polynômes d'Hermite, elles sont appelées fonctions de forme ou fonctions d'interpolation.

$$\begin{cases} \psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ \psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \end{cases} \quad (3.9)$$

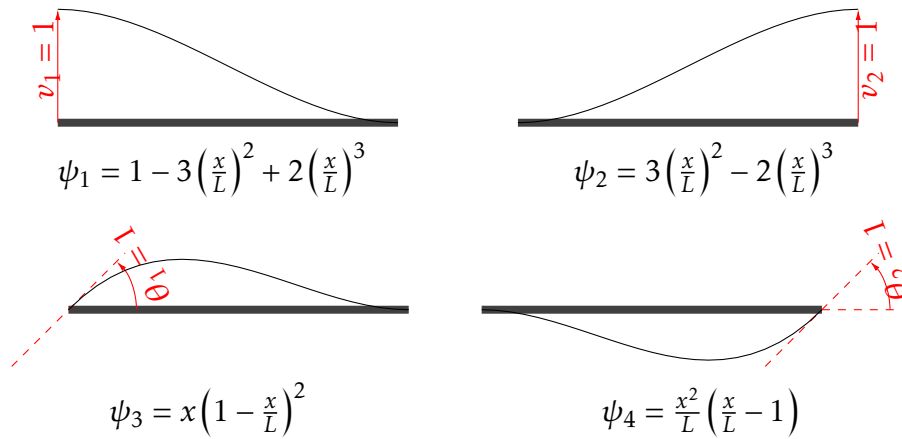


FIGURE 3.7 – Fonctions de forme de l'élément de référence

En utilisant le principe des travaux virtuels, il est possible de démontrer que les éléments k_{ij} de la matrice rigidité de l'élément de référence s'écrivent comme suit :

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad (3.10)$$

L'équation 3.10 montre que $k_{ij} = k_{ji}$, ce qui permet de conclure que la matrice rigidité est symétrique.

En considérant le cas où l'élément poutre de référence soit à inertie constante ($I(x) = I$) on peut utiliser les fonctions de forme de l'équation 3.9 pour calculer tous les éléments k_{ij} , on obtient alors la matrice rigidité élémentaire suivante :

$$K^{(e)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 6L & 6L \\ -12 & 12 & -6L & -6L \\ 6L & -6L & 4L^2 & 2L^2 \\ 6L & -6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.4.2 Matrice Masse [M]

3.4.2.1 Matrice Masse cohérente

Considérons le même élément de référence de la figure 3.6, la masse $m(x)$ étant répartie le long de l'élément, entre 0 et L . Les éléments m_{ij} de la matrice masse cohérente sont déterminés par l'équation 3.12. On peut remarquer que la matrice masse est symétrique aussi.

$$m_{ij} = \int_0^L m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (3.12)$$

Dans le cas où la masse de l'élément poutre est répartie de manière uniforme ($m(x) = \bar{m}$), le calcul des éléments m_{ij} en utilisant les fonctions de forme de l'équation 3.9 donne la matrice suivante :

$$M^{(e)} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.4.2.2 Matrice Masses concentrées

La représentation en masses concentrées consiste à supposer que toute la masse de la structure est concentrée au niveau des nœuds. La discontinuité de la masse ainsi créée fait que les éléments extra-diagonaux de la matrice masse soient nuls ($m_{ij} = 0, \quad i \neq j$), car une accélération appliquée à un nœud où est concentrée une masse ne produit de force d'inertie qu'en ce même point. Si en plus de la translation il y a un ddl de rotation i , alors l'élément diagonal correspondant est nul ($m_{ii} = 0$), car une masse ponctuelle n'a pas d'inertie de rotation. La matrice masses concentrées est donc diagonale pouvant contenir des éléments diagonaux nuls s'ils correspondent à des ddls de rotation.

Prenons l'exemple de l'élément de référence de la figure 3.6, en considérant la masse \bar{m} uniformément répartie sur la longueur L de l'élément. La masse totale de l'élément ($\bar{m}L$) est concentrée sur les deux nœuds tel que montré sur la figure 3.8.

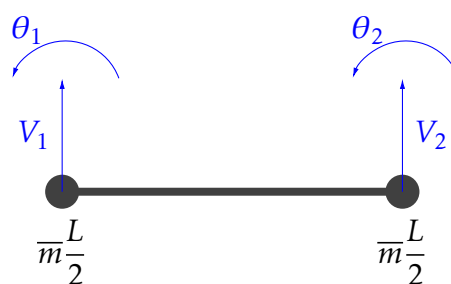


FIGURE 3.8 – Modèle masses concentrées de l'élément de référence

La matrice masses concentrées peut facilement s'écrire comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\bar{m}L}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{m}L}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.5 Modélisation simplifiée masses-ressorts

Dans la modélisation des systèmes à plusieurs ddl par masses-ressorts, l'équation de mouvement s'écrit tout simplement en écrivant l'équilibre des forces de chaque masse.

3.5.1 Système soumis à une force

Considérons l'exemple du portique à trois ddl de la figure 3.9 soumis à une force $F(t)$, appliquée au niveau de la masse m_2 . Les poutres sont infiniment rigides et contiennent toute la masse du portique. L'amortissement est introduit dans cet exemple en affectant une constante d'amortissement visqueux à chaque niveau. Le modèle masses-ressorts correspondant au portique est représenté sur la figure 3.10

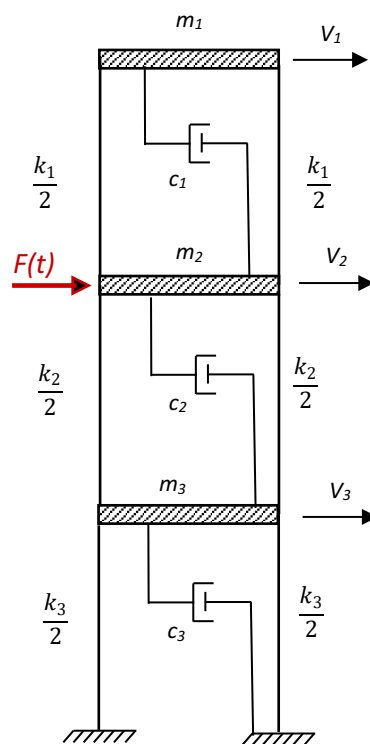


FIGURE 3.9 – Portique à trois ddl

Les forces qui agissent sur le système à un instant donné t sont représentées sur la figure 3.11 en supposant qu'à cet instant le rapport des déplacements est tel que $V_1 > V_2 > V_3$. En écrivant l'équilibre des forces de chaque masse on obtient le système

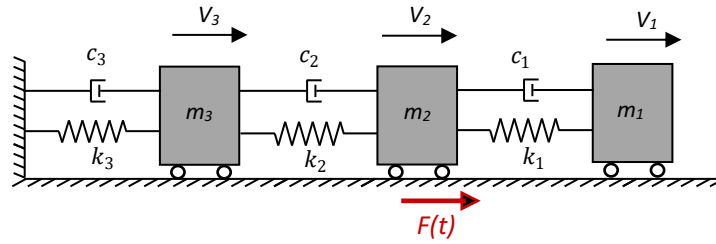


FIGURE 3.10 – Modèle masses ressorts à trois ddl

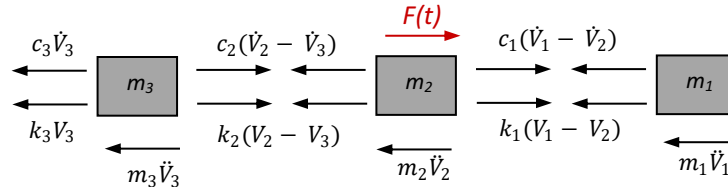


FIGURE 3.11 – Équilibre des forces

d'équations suivant :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{V}_1 + c_1(\dot{V}_1 - \dot{V}_2) + k_1(V_1 - V_2) = 0 \\ m_2 \ddot{V}_2 + c_2(\dot{V}_2 - \dot{V}_3) - c_1(\dot{V}_1 - \dot{V}_2) + k_2(V_2 - V_3) - k_1(V_1 - V_2) = F(t) \\ m_3 \ddot{V}_3 - c_2(\dot{V}_2 - \dot{V}_3) + c_3 \dot{V}_3 - k_2(V_2 - V_3) + k_3 V_3 = 0 \end{cases}$$

Qu'on peut réécrire comme suit :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{V}_1 + c_1 \dot{V}_1 - c_1 \dot{V}_2 + 0 \cdot \dot{V}_3 + k_1 V_1 - k_1 V_2 + 0 \cdot V_3 = 0 \\ m_2 \ddot{V}_2 - c_1 \dot{V}_1 + (c_1 + c_2) \dot{V}_2 - c_2 \dot{V}_3 - k_1 V_1 + (k_1 + k_2) V_2 - k_3 V_3 = F(t) \\ m_3 \ddot{V}_3 + 0 \cdot \dot{V}_1 - c_2 \dot{V}_2 + (c_2 + c_3) \dot{V}_3 + 0 \cdot V_1 + k_2 V_2 + (k_2 + k_3) V_3 = 0 \end{cases}$$

L'équation de mouvement sous forme matricielle s'écrit alors comme suit :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \\ \ddot{V}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.5.2 Excitation d'appuis : mouvement à la base

Considérons le portique à trois ddl de la figure 3.9 soumis à un déplacement horizontal à sa base $V_b(t)$ (excitation sismique). A partir de la position initiale du portique, chaque masse va subir le déplacement de la base (déplacement de corps

rigide) en plus d'un déplacement relatif dû à la déformation des poteaux tel que montré sur la figure 3.12. Le déplacement total (absolu) de chaque masse $V_i^t(t)$ est la somme du déplacement de la base $V_b(t)$ et du déplacement relatif $V_i(t)$.

$$V_i^t(t) = V_b(t) + V_i(t) \quad i = 1, 3$$

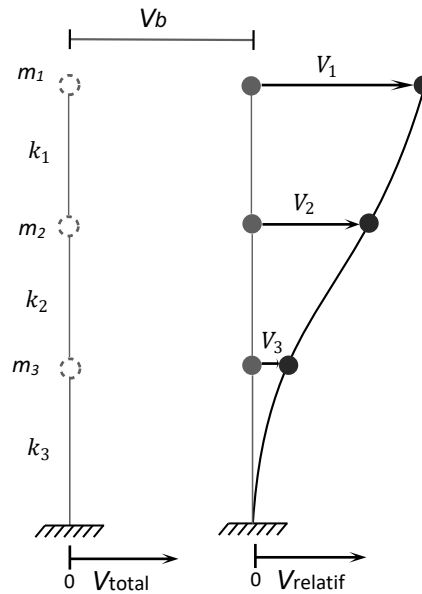


FIGURE 3.12 – Excitation à la base

La force d'inertie $f_{Ii}(t)$ de chaque masse s'écrit donc en fonction du déplacement total, $f_{Ii}(t) = m_i \ddot{V}_i^t(t)$. Par contre, les forces élastique et d'amortissement, elles s'écrivent en fonction du déplacement relatif, car elles sont liées à la déformation qui n'a lieu que lorsque les masses se déplacent par rapport au repère relatif. Le déplacement de la base confère aux poteaux un déplacement de corps rigide sans les déformer. Par ailleurs, n'ayant pas de forces appliquées sur les masses de manière explicite, alors la somme des forces appliquées à chaque masse est nulle.

En écrivant l'équation de mouvement de chaque masse, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{V}_1^t + c_1(\dot{V}_1 - \dot{V}_2) + k_1(V_1 - V_2) = 0 \\ m_2 \ddot{V}_2^t + c_2(\dot{V}_2 - \dot{V}_3) - c_1(\dot{V}_1 - \dot{V}_2) + k_2(V_2 - V_3) - k_1(V_1 - V_2) = 0 \\ m_3 \ddot{V}_3^t - c_2(\dot{V}_2 - \dot{V}_3) + c_3 \dot{V}_3 - k_2(V_2 - V_3) + k_3 V_3 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant $V_i^t(t)$ par $V_b(t) + V_i(t)$ on obtient l'équation de mouvement sous forme matricielle en fonction du déplacement relatif

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \\ \ddot{V}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{V}_b \\ -m_2 \ddot{V}_b \\ -m_3 \ddot{V}_b \end{Bmatrix}$$

Le vecteur chargement $P(t)$ peut s'écrire en fonction de la matrice masse comme suit :

$$P(t) = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{V}_b$$

3.6 Application

Soit une poutre console de masse uniformément répartie $\bar{m} = 2100\text{kg/ml}$ et de caractéristiques de rigidité EI , décomposée en deux éléments de longueurs différentes. Les quatre ddls de la poutre sont représentés sur la figure 3.13.

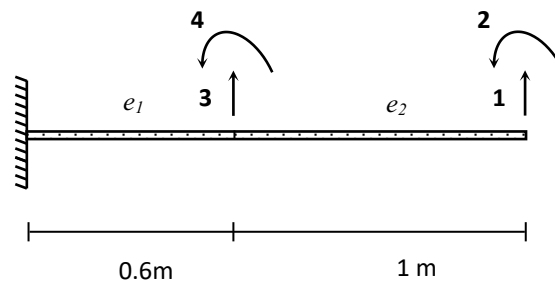


FIGURE 3.13 – Poutre console à 4 ddls

1. Déterminer la matrice masses concentrées de la poutre.
2. En utilisant les matrices de l'élément de référence, déterminer la matrice masse cohérente et la matrice rigidité de la poutre.
3. En utilisant les fonctions de forme de l'élément de référence, calculer l'élément m_{12} de la matrice masse cohérente de la poutre.

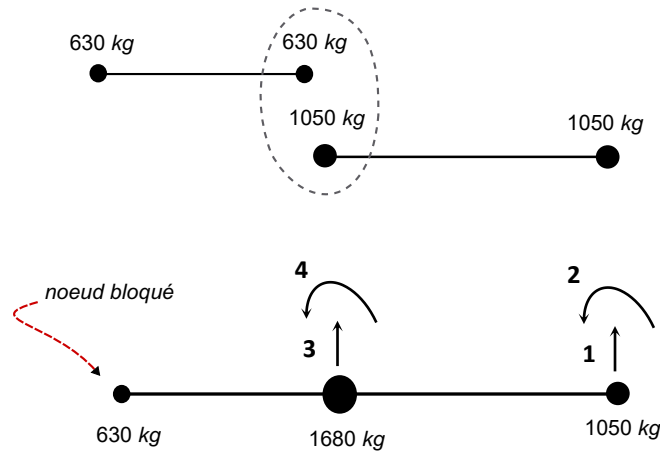
Solution

1. Matrice masses concentrées

La masse de l'élément 1, $m_{e1} = 2100 \times 0.6 = 1260\text{kg}$. La moitié de cette masse $\frac{m_{e1}}{2} = 630\text{kg}$ est concentrée dans chaque nœud.

La masse de l'élément 2, $m_{e2} = 2100 \times 1 = 2100\text{kg}$. La moitié de cette masse $\frac{m_{e2}}{2} = 1050\text{kg}$ est concentrée dans chaque nœud.

L'assemblage des deux éléments donne le modèle masses concentrées tel que montré sur la figure ci-dessous.

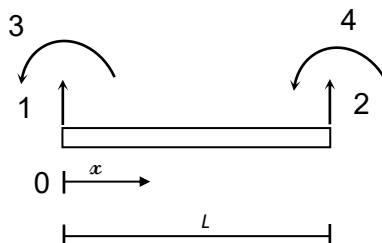


La matrice de masses concentrées est diagonale (les éléments extra-diagonaux sont nuls). Sur la diagonale, on affecte la valeur de la masse concentrée aux ddls de translation et la valeur nulle aux ddls de rotation. On obtient la matrice suivante

$$M = \begin{bmatrix} 1050 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1680 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{kg}$$

2. Matrices M et K, en utilisant les matrices de l'élément de référence

L'élément de référence :



Matrice masse cohérente

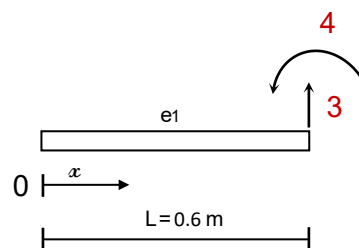
La matrice masse cohérente de l'élément de référence :

$$M = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Pour chaque élément de la poutre, on reprend la matrice de l'élément de référence et on intervient sur deux points :

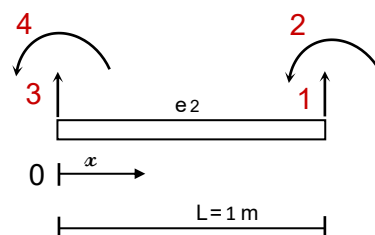
- Remplacer les valeurs de \bar{m} et L par celles de l'élément considéré.
- Reprendre la numérotation, des lignes et des colonnes, pour correspondre à l'élément considéré.

- La matrice masse cohérente de l'élément e_1 ($\bar{m} = 2100\text{kg/ml}, L = 0.6\text{m}$)



$$M_{e1} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{matrix} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 468 & -39.6 \\ -39.6 & 4.32 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

- La matrice masse cohérente de l'élément e_2 ($\bar{m} = 2100\text{kg/ml}, L = 1\text{m}$)



$$M_{e2} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 780 & 270 & 110 & -65 \\ 270 & 780 & 65 & -110 \\ 110 & 65 & 20 & -15 \\ -65 & -110 & -15 & 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$$

La matrice masse cohérente globale est obtenue par l'assemblage des deux matrices élémentaires M_{e1} et M_{e2} . Chaque élément m_{ij} de la matrice globale est la somme des éléments m_{ij} des matrices élémentaires. $m_{ij}^{Matriceglobale} = m_{ij}^{e1} + m_{ij}^{e2}$.

$$M = \begin{bmatrix} 780 & -110 & 270 & 65 \\ -110 & 20 & -65 & -15 \\ 270 & -65 & 1248 & 70.4 \\ 65 & -15 & 70.4 & 24.32 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Matrice Rigidité

La matrice rigidité de l'élément de référence : $K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 6L & 6L \\ -12 & 12 & -6L & -6L \\ 6L & -6L & 4L^2 & 2L^2 \\ 6L & -6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$

On procède de la même façon que pour la matrice masse cohérente

- La matrice rigidité de l'élément $e_1 (EI, L = 0.6m)$

$$K_{e1} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 6L & 6L \\ -12 & 12 & -6L & -6L \\ 6L & -6L & 4L^2 & 2L^2 \\ 6L & -6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{matrix} = EI \begin{bmatrix} 55.55 & -16.67 \\ -16.67 & 6.67 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

- La matrice rigidité de l'élément $e_2 (EI, L = 1m)$

$$K_{e2} = \frac{EI}{L^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 1 & 4 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & -12 & 6L & 6L \\ -12 & 12 & -6L & -6L \\ 6L & -6L & 4L^2 & 2L^2 \\ 6L & -6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \end{matrix} = EI \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 1 & 4 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & -12 & 6 & 6 \\ -12 & 12 & -6 & -6 \\ 6 & -6 & 4 & 2 \\ 6 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matrice rigidité globale est obtenue par l'assemblage des deux matrices élémentaires K_{e1} et K_{e2} . $k_{ij}^{Matriceglobale} = k_{ij}^{e1} + k_{ij}^{e2}$.

$$K = EI \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 67.56 & -10.67 \\ -6 & 2 & -10.67 & 10.67 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3. L'élément m_{12} de la matrice masse cohérente en utilisant les fonctions de forme

Les fonctions de forme de l'élément de référence sont données par :

$$\begin{cases} \psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ \psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \end{cases}$$

On a $m_{12} = m_{12}^{e1} + m_{12}^{e2}$.

A partir de l'élément e_1 , $m_{12}^{e1} = 0$, car les ddls 1 et 2 ne figurent pas dans l'élément 1.

A partir de l'élément e_2 , $m_{12} = \int_0^L m(x) \psi_1(x) \psi_2(x) dx = \bar{m} \int_0^L \psi_1(x) \psi_2(x) dx$.

Dans l'élément e_2 , $L = 1m$, la fonction $\psi_1(x)$ correspond à la fonction $\psi_2(x)$ de l'élément de référence et $\psi_2(x)$ correspond à $\psi_4(x)$ de l'élément de référence.

Ce qui donne :

$$\psi_1(x) = \psi_2(x)^{référence} = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 = 3x^2 - 2x^3$$

$$\psi_2(x) = \psi_4(x)^{référence} = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) = x^3 - x^2$$

d'où

$$\begin{aligned}m_{12} &= \bar{m} \int_0^1 (3x^2 - 2x^3)(x^3 - x^2)dx \\ &= \bar{m} \int_0^1 (-2x^6 + 5x^5 - 3x^4)dx \\ &= \bar{m} \left(-2\frac{x^7}{7} + 5\frac{x^6}{6} - 3\frac{x^5}{5} \right)_0^1 \\ &= 2100 \times \left(\frac{-11}{210} \right) \\ &= -110 \text{ Kg.m}\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Anil K. Chopra, 1995. Dynamics of structures, Theory and applications to earthquake engineering, Prentice Hall, Engelwood cliffs, New Jersey.
- [2] R.W. Clough and J. Penzien, 1995. Dynamics of structures, third edition, Computers and Structures, Inc. University Ave. Berkeley, CA 94704, USA.
- [3] A. Filiatrault, 1996. Éléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures, Édition de l'École Polytechnique de Montréal.
- [4] P. Paultre, 2004. Dynamique des structures, application aux ouvrages de génie civil, Édition Hermès, Lavoisier.
- [5] A. Pecker, 2006. Dynamique des structures et des ouvrages, Édition de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [6] DTR. BC 2 48, Ministère de l'Habitat, Règles Parasismiques Algériennes RPA 99/Version 2003.
- [7] DTR. BC 2 48, Ministère de l'Habitat, Règles Parasismiques Algériennes RPA 2024.